Übungsblatt No. 1: Variationen

Ausgehändigt: 24.10.2016 Abgabe: 31.10.2016

Aufgabe 1: Variation von $g^{\mu\nu}$ und g (2 Punkte)

a) Zeige, dass die Variation der inversen Metrik $g^{\mu\nu}$ gegeben ist durch

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

was aus der definierenden Gleichung $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^\mu_\beta$ folgt.

b) Zeige, dass die Variation der Determinanten $g := \det(g_{\mu\nu})$ der Metrik gegeben ist durch

$$\delta g = g\, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

wobei die Formel $\delta \det A = \det A \operatorname{tr}(A^{-1}\delta A)$ für eine beliebige Matrix A vorausgesetzt werden darf.

Aufgabe 2: Variation des Krümmungstensors (3 Punkte)

Zur Erinnerung: Die kovariante Ableitung ∇_α hängt mit der partiellen Ableitung ∂_α über

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots} = \partial_\alpha T^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\ldots} &+ \Gamma^{\mu_1}{}_{\alpha\rho} T^{\rho\mu_2\cdots}{}_{\nu_1\ldots} + \Gamma^{\mu_2}{}_{\alpha\rho} T^{\mu_1\rho\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\ldots} + \cdots \\ &- \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu_1} T^{\mu_1\cdots}{}_{\rho\nu_2\ldots} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu_2} T^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\rho\nu_3\ldots} - \cdots\end{aligned} \tag{3}$$

zusammen, wobei T ein beliebiger Tensor ist. Der Krümmungstensor ist gegeben durch

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{\beta\nu} - \Gamma^\mu{}_{\beta\rho}\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu}. \tag{4}$$

Zeige die Formel

$$\delta R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \nabla_\alpha \delta\Gamma^\mu{}_{\beta\nu} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}. \tag{5}$$

Die Variation δ darf mit der partiellen Ableitung ∂_α vertauscht werden (aber nicht mit ∇_α). Ausdrücke der Form $\nabla_\alpha \delta\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}$ sind durch Gl. 3 mit $T \to \delta\Gamma$ gegeben. **Hinweis:** Die explizite Formel für die Christoffelsymbole $\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}$ muss nicht verwendet werden, lediglich die Symmetrie $\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}$ wird benötigt.