Übungsblatt No. 12: Datenanalyse

Ausgehändigt: 06.02.2017 Abgabe: 13.02.2017

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeige, dass für Gauß'sches Rauschen n(t) sowie $A(t) \in \mathbb{R}$, $B(t) \in \mathbb{R}$ die Relation

$$< (A|n)(n|B) >= (A|B) \tag{1}$$

gilt, wobei $< \cdots >$ ein Ensemblemittel über das Rauschen darstellt.

Aufgabe 2: Fisher-Matrix (3 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gravitationswelle mit Parametern $\vec{\xi}$ im Signal s vorhanden ist, ist gegeben durch

$$p(\vec{\xi}|s) \propto e^{(h_\xi|s)-\frac{1}{2}(h_\xi|h_\xi)}, \tag{2}$$

falls die a-priori-Wahrscheinlichkeit $p(\vec{\xi})$ gleichmäßig verteilt ist.

Nimm an, dass das Rauschen klein ist, so dass $p(\vec{\xi}|s)$ um den Wahrscheinlichsten Wert herum approximiert werden kann. Entwickle dazu den Exponenten um die Parameter $\vec{\xi}_{\mathrm{ML}}$ mit maximaler Wahrscheinlichkeit (maximum likelihood, ML) bis zur zweiten Ordnung in $\Delta\vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{\xi}_{\mathrm{ML}}$. Zeige, dass unter diesen Bedingungen

$$p(\vec{\xi}|s) \propto e^{-\frac{1}{2}\Gamma_{ij}\Delta\xi^i\Delta\xi^j}, \tag{3}$$

gilt mit der sogenannten Fisher-Matrix

$$\Gamma_{ij} = \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \xi^i}\middle|\frac{\partial h_\xi}{\partial \xi^j}\right). \tag{4}$$

(Auf der rechten Seite bezeichnet $(\cdot|\cdot)$ das Skalarprodukt auf dem Funktionenraum.) Was folgt hieraus für $< \Delta\xi^i\Delta\xi^j >$?