Übungsblatt No. 3: Lineare Näherung

Ausgehändigt: 07.11.2016 Abgabe: 14.11.2016

Wir setzen die Metrik als

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Im Vergleich zur Vorlesung wird also die Hintergrundmetrik gleich der flachen Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ gesetzt. Die Gravitationswellen $h_{\mu\nu}$ sollen klein sein und wir vernachlässigen Terme der Ordnung h^2.

Anmerkung: Auf der Ordnung h^2 wird die Hintergrundmetrik auch durch die Gravitationswellen gekrümmt, so dass man für eine systematische Entwicklung die Hintergrundmetrik allgemein halten sollte.

Aufgabe 1: Christoffel und Riemann (2 Punkte)

a) Zeige

$$2\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}(\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\beta h_{\alpha\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}) + O(h^2). \tag{2}$$

b) Zeige

$$2R_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta \; h_{\mu\alpha} + O(h^2). \tag{3}$$

Aufgabe 2: Einstein-Gleichung (3 Punkte)

Der Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$ lautet

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{4}$$

Berechne den Einstein-Tensor bis zur linearen Ordnung in $h_{\mu\nu}$.

(Die Einstein-Gleichungen in linearer Näherung lauten dann $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$.)