Übungsblatt No. 4: Wirkung der Gravitationswellen

Ausgehändigt: 14.11.2016 Abgabe: 21.11.2016

Aufgabe 1: Spurumkehroperator (1 Punkt)

Der Spurumkehroperator ${P_{\mu\nu}}^{\alpha\beta}$ bildet symmetrische Tensoren auf symmetretrische Tensoren ab, z.B. für $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$

$$ {P_{\mu\nu}}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {h_\alpha}^\alpha, \qquad \text{bzw. } {P_{\mu\nu}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu + \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}), \tag{1} $$

und kehrt das Vorzeichen der Spur um, d.h. ${P_\mu}^{\mu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -{h_\mu}^\mu$.

Überzeuge dich von den Eigenschaften

$$ P^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta\mu\nu} h_{\alpha\beta}, \quad \text{bzw.} \quad P^{\mu\nu\alpha\beta} = P^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2} $$

$$ {P_{\mu\nu}}^{\alpha\beta} {P_{\alpha\beta}}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} = h_{\mu\nu}. \tag{3} $$

Aufgabe 2: Eichinvariante Wirkung (4 Punkte)

Die Wirkung der Gravitationswellen $h_{\mu\nu}$ lautet

$$ S = \frac{1}{64\pi} \int d^4x \, \sqrt{-g} \left[-\partial_\rho h_{\mu\nu} P^{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta} + 2 \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} g^{\nu\beta} \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} \right] + \frac{1}{2} \int d^4x \, \sqrt{-g} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \tag{4} $$

mit der Abkürzung $\bar{h}_{\mu\nu} = {P_{\mu\nu}}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ und dem Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

a) Berechne die Bewegungsgleichungen durch Variation von $h_{\mu\nu}$ in der Wirkung.

b) Untersuche die Invarianz der Wirkung unter infinitesimalen Eichtransformationen

$$ \delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \tag{5} $$

mit beliebigen infinitesimalen Funktionen ξ_μ. Welche Bedingung muss $T^{\mu\nu}$ erfüllen, damit die Wirkung eichinvariant ist?

Hinweise: Wie in der Vorlesung soll die Hintergrundmetrik annähernd konstante Komponenten haben, d.h. $g_{\mu\nu} \approx \text{const}$ oder $\nabla_\mu \approx \partial_\mu$ (auf Skalen der Gravitationswellen). Für Variationen gilt $\delta T^{\mu\nu} = 0 = \delta g_{\mu\nu}$ und Oberflächenterme werden vernachlässigt. Drücke das Ergebnis für die Bewegungsgleichung in a) durch $\bar{h}_{\mu\nu}$ statt $h_{\mu\nu}$ aus. In der Eichung $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$ \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}. \tag{6} $$