

## Übungsblatt No. 6: Ebene monochromatische GW

Ausgehändigt: 28.11.2016

Abgabe: 05.12.2016

### Aufgabe: Geodätische Abweichung (5 Punkte)

- a) Zeige, dass die geodätische Abweichung beschrieben durch

$$\frac{D^2 a^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta a^\nu \quad (1)$$

sich vereinfacht zu

$$\frac{d^2 a^i}{dt^2} \approx \frac{1}{2} a^j \frac{\partial^2 h_{ji}^{\text{TT}}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

für zwei Anfangs ruhende benachbarte Geodäten mit Abstand  $a^\mu$  in der linearen Näherung. Wähle hierzu eine Eichung, in der die Christoffelsymbole auf der linken Seite verschwinden (frei fallendes Bezugssystem), und benutze in der rechten Seite die transversal-spurfreie Eichung für Gravitationswellen im Vakuum,  $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ . (Dieses Vorgehen wird in der Übung begründet.) Wähle auch  $a^0 = 0$ : Dies legt fest, in welchem Bezugssystem der Abstand  $a^\mu$  der Geodäten beobachtet wird. Nutze, dass  $(u^\mu) = (1, 0, 0, 0) + O(h)$  und rechtfertige dies kurz.

- b) Setze in Gl. 2 die ebene monochromatische Gravitationswelle aus der Vorlesung ein. Löse die Differentialgleichung für  $a^i$  näherungsweise, mit dem Ansatz  $a^i = a_0^i + \Delta a^i$  wobei  $a_0^i = \text{const}$  und  $|\Delta a^i| \ll |a_0^i|$ .
- c) Ausgehend von der Näherung in b), diskutiere qualitativ die geodätische Abweichung für Testmassen die auf einem Ring angeordnet sind, wobei der Ring senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Gravitationswelle orientiert ist. Behandle hierzu getrennt die Polarisierungen  $h_+$ ,  $h_\times$ , und die zirkularen Polarisierungen.
- d) Interpretiere die rechte Seite der Gl. 2 als ein Kraftfeld. Skizziere (grob) die Feldlinien dieses Kraftfeldes, getrennt für die Polarisierungen  $h_+$  und  $h_\times$ . Eventuell ist es hilfreich (aber nicht zwingend erforderlich) die Divergenz dieses Kraftfeldes zu berechnen.