Übungsblatt No. 7: Quellen der Gravitationswellen

Ausgehändigt: 05.11.2016 **Abgabe: 09.01.2017**

Aufgabe: Elliptisches Binärsystem (10 Punkte)

Die (gemittelte) Änderung von Energie E und Drehimpuls L eines Binärsystems auf einem elliptischen Orbit sind näherungsweise gegeben durch

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2 M^3}{a^5(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right), \tag{1}$$

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2 M^{5/2}}{a^{7/2}(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right), \tag{2}$$

wobei e die (numerische) Exzentrizität, a die große Halbachse, $M = m_1 + m_2$ und $\mu = m_1 m_2/M$ ist. Die Massen der beiden Körper sind m_1 und m_2.

a) Berechne ausgehend von Gln. 1, 2 die Zeitableitungen von Exzentrizität und großer Halbachse als Funktion von a, e, M und μ.

b) Leite die Gln. 1, 2 her. **(Lange Rechnung!)**

Formeln aus der Vorlesung:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5} < \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} >, \tag{3}$$

$$\frac{dL^i}{dt} = -\frac{2}{5}\epsilon^{ikl} < \ddot{Q}_{kj}\dddot{Q}_{lj} > . \tag{4}$$

Die Zeitmittelung $< \cdots >$ wird über einen Orbit ausgeführt. Die Zeitableitungen des Quadrupols $Q_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}M_{kk}$ werden nach der Newtonschen Mechanik berechnet:

$$M^{ij} = m_1 r_1^i r_1^j + m_2 r_2^i r_2^j, \qquad r_1^i = \frac{m_2}{M}r^i, \qquad r_2^i = -\frac{m_1}{M}r^i, \tag{5}$$

$$(r^i) = r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}, \qquad r = \frac{k}{1+e\cos\phi}, \qquad k = a(1-e^2) = \frac{L^2}{\mu^2 M}, \tag{6}$$

$$L = \mu r^2\dot{\phi}, \qquad E = -\frac{\mu M}{2a}. \tag{7}$$

Für die Zeitableitungen des Quadrupols sind E, L, a und e konstant. Für die Zeitmittelung sind folgende Formeln nützlich:

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \cos^2\phi = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} d\phi\, \cos^4\phi = \frac{3\pi}{4}, \tag{8}$$

Die Dauer eines Orbits T ist nach dem dritten Keplerschen Gesetz gegeben durch $a^3(2\pi/T)^2 = M$.