Übungsblatt No. 8: Gravitationswelle eines Binärsystems

Ausgehändigt: 09.01.2017 Abgabe: 16.01.2017

Aufgabe (5 Punkte)

Nimm an, dass die Quelle einer Gravitationswelle so rotiert wurde, dass der Beobachter auf der z-Achse liegt, d.h.

$$(h_{ij}^{\prime\mathrm{TT}}) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M'_{ij} = R_{ik} R_{jl} M_{kl}, \tag{1}$$

mit einer Rotationsmatrix R_{ik}. Es gilt die Quadrupolnäherung (Vorlesung)

$$h_{ij}^{\prime\mathrm{TT}} = \frac{2}{R} \Lambda_{ijkl} \ddot{M}'_{kl}, \tag{2}$$

mit dem Projektor auf den transversal-spurfreien Anteil $\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ik}\Lambda_{jl} - \frac{1}{2}\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}$ und dem transversalen Projektor $\Lambda_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_j$ [hier ist $(n_i) = (0, 0, 1)$]. Der Strich $'$ bedeutet rotiertes System, nicht Ableitung. R ist der Abstand zum Beobachter und hat nichts mit der Rotationsmatrix zu tun.

a) Zeige, dass h_+ und $h_\times$ gegeben sind durch

$$h_+ = \frac{1}{R}(\ddot{M}'_{11} - \ddot{M}'_{22}), \qquad h_\times = \frac{2}{R}\ddot{M}'_{12}. \tag{3}$$

b) Zeige, dass für ein Binärsystem auf einer **Kreisbahn**

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{4\mu\omega^2 r^2}{R} \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \cos(2\omega t + 2\phi_0) \\ h_\times &= -\frac{4\mu\omega^2 r^2}{R} \cos\theta \sin(2\omega t + 2\phi_0) \end{aligned} \tag{4}$$

gilt, wenn die Rotationsmatrix als

$$\begin{aligned} (R_{ij}) &= \begin{pmatrix} \text{Rotation der} \\ \text{yz-Ebene um } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Rotation der} \\ \text{xy-Ebene um } \phi_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & 0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

gewählt wird. Es dürfen die Formeln

$$\ddot{M}_{11} = -\ddot{M}_{22} = -2\mu\omega^2 r^2 [2\cos^2(\omega t) - 1] = -2\mu\omega^2 r^2 \cos(2\omega t) \tag{6}$$

$$\ddot{M}_{12} = -4\mu\omega^2 r^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t) = -2\mu\omega^2 r^2 \sin(2\omega t) \tag{7}$$

aus der Vorlesung verwendet werden. (Alle anderen M_{ij} verschwinden.)