HU WS 2016 V11S1

Der Lichtring

jetzt für masselose Teilchen

$u_\mu u^\mu = -1 \quad \rightarrow \quad u_\mu u^\mu = 0$ mit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

λ: allgem. Weltlinienparameter, nicht die Eigenzeit

$$V_r^2 = \left(\underline{1} + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \longrightarrow V_r^2 = \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Kreisbahn:

$$0 = \frac{dV_r^2}{dr} = L^2\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{6M}{r^4}\right)$$

$\Leftrightarrow r = 3M$ oder $x = \frac{1}{3}$

instabile Kreisbahn für Licht!

Pol von $e(x)$: Teilchen müsste Lichtgeschwindigkeit haben

(Skizze S2)

GW bewegen sich ähnlich wie Licht

$\Rightarrow$ GW können auf dem Lichtring "eingefangen" werden!

$\rightarrow$ Resonator
instabile Kreisbahn $\hat{=}$ Dämpfung } Ausklingen eines schwarzen Loches "ringdown"

Frequenz?

$\omega^2 r^3 = M \quad \Leftrightarrow \quad M\omega = \left(\frac{M}{r}\right)^{3/2} = x^{3/2}, \; x = \frac{1}{3}$

$M\omega = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}19$

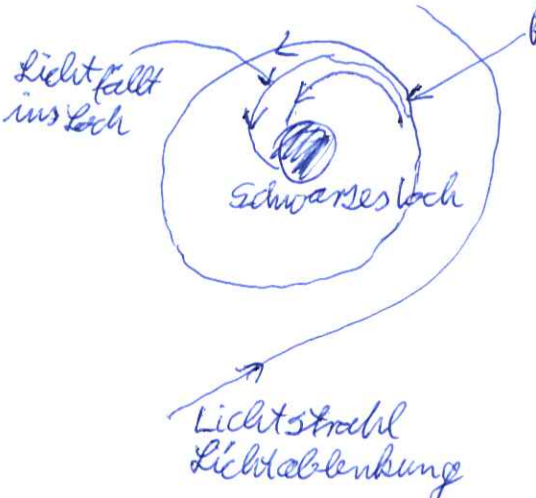
GW Frequenz des Ausklingens nach numerischer Lösung der sog. Regge-Wheeler-Gleichung:

$M\omega_{GW} \approx 0{,}38$

$\omega_{GW} \approx 2\omega$ anwendbar?

HU WS2016 V11 S2

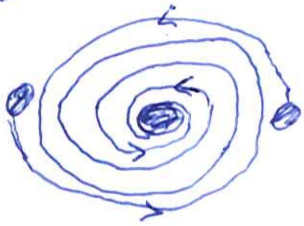
~~Der Lichtring (Ü.blatt 9)~~



kreisförmiger instabiler Photonenorbit
↳ Lichtring
bei $r = 3M$ (Schwarzschildkoord.) (SK)
bzw $x = \frac{1}{3}$

Stationen in den GW ~~der~~ binärer schwarzer Löcher

1.) frühes Einspiralen:
Orbit ist i.a. elliptisch
Exzentrizität und Abstand verringern sich durch Abstrahlung der GW



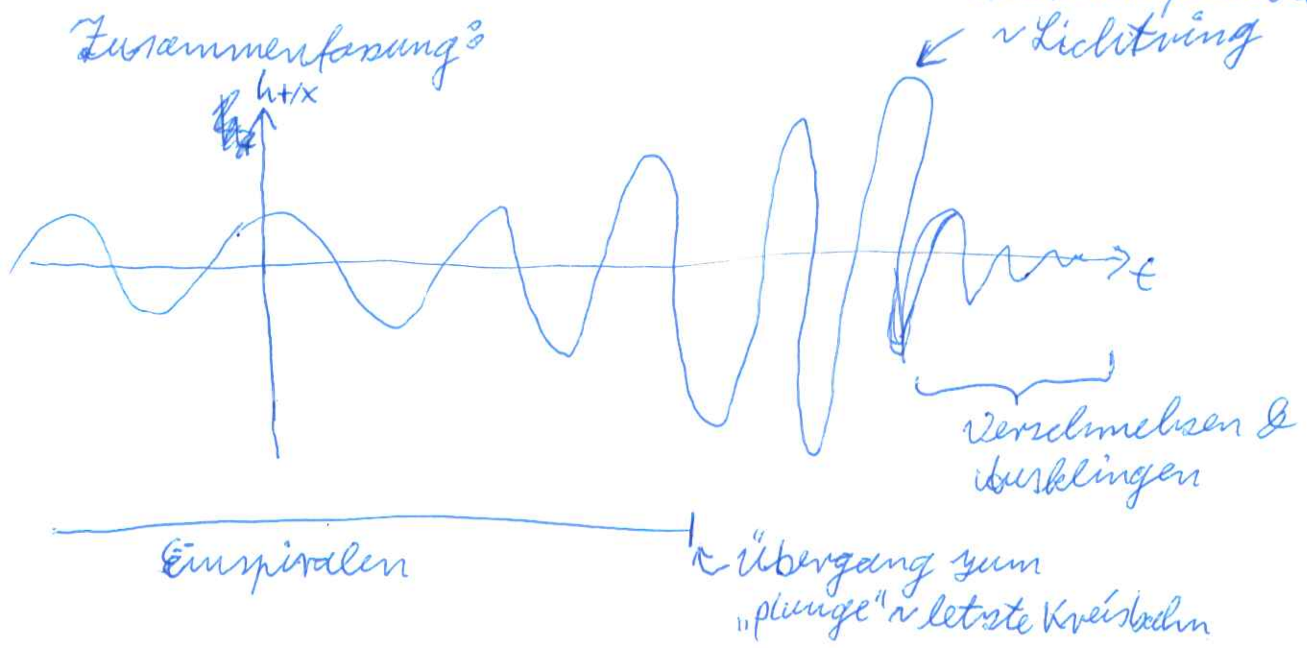
2.) spätes Einspiralen:
Orbit ist i.a. nahezu kreisförmig
~~die~~ Exzentrizität verringert sich schneller als der Abstand (Ü.blatt 7)

3.) ~~let~~ plunge: System erreicht letzte Kreisbahn
bei $r = 6M$ in ~~Schw~~ SK
dann stürzen die schwarzen Löcher aufeinander zu (Orbit wird instabil)
Mitten im plunge: Lichtring bei $r = 3M$ in SK
↳ GW werden auf dem Lichtring "gefangen" und fallen teilweise in die schwarzen Löcher
↳ Maximum in der Amplitude ~~der~~ der GW erreicht

4.) ~~merger~~ ~~ringdown~~ schwarze Löcher bilden
ringdown: gemeinsamen Horizont, bei $r = 2M$ in SK
"merger" (verschmelzen)
↳ bilden einzelnes, stark deformiertes schwarzes Loch
↳ Deformationen werden als GW abgestrahlt
Lichtring bildet eine Art Resonator
⇝ wie das (~~Aus~~) (Aus)klingen einer Glocke
⇝ ringdown!

HU WS2016 V11S3

Zusammenfassung:



analytische Wellenformen für das Einspiralen

analytische Näherungen:
- kleine/große (extreme) Massenverhältnisse
  ⇝ Testmasse, siehe VL 10
- post-Newton'sche (PN) Näherung:
  schwaches Gr.-feld & langsame Bewegung

$\frac{M}{r} \ll 1$ $\qquad v \sim \omega \ll 1$

gebundene Bahn (Kreisbahn): $\omega^2 r^3 \approx M$

⇝ nur ein Entwicklungsparameter

z.B. $x := (M\omega)^{2/3} \sim \frac{M}{r}$ ← i.a. nicht exakt

eichunabhängig

nach langer Rechnung in PN Näherung für Kreisbahnen

(Feld- und Bewegungsgleichungen lösen / Feynmandiagramme):

$$e(x) = -\frac{1}{2} x \left[1 - \frac{1}{12}(9+\eta)x + \dots\right]$$ e: Bindungsenergie (nicht Exzentrizität)

bekannt bis x^4

η: symmetrische Massenverhältnis

$$\eta = \frac{\mu}{M} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{4}$$

Testmasse $\qquad$ gleiche Massen

Vgl. Newton: $e = \frac{E}{\mu} = \frac{-M}{2r} = -\frac{1}{2} x$

ü.blatt 7

Vgl. Testmasse: $e(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{1-3x}} - 1 \approx -\frac{1}{2} x \left(1 - \frac{3}{4}x + \dots\right)$

Kombination verschiedener Ergebnisse für $e(x)$ möglich

(Resummation/Interpolation/Fit für numerische Simulationen)