HU WS 2016 V1451

Richtungsabhängigkeit   jetzt: GW aus beliebiger Richtung

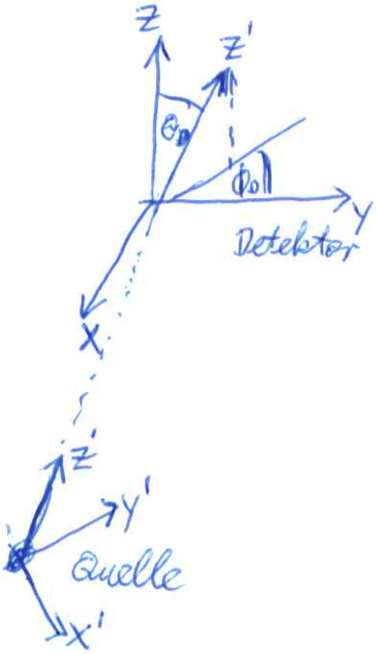
$$h_+ \to h(t) = D^{ij} h_{ij}^{TT} = h_+(t) F_+(\theta_D, \phi_D) + h_\times F_\times(\theta_D, \phi_D)$$

Detektor-Tensor: Beschreibt Orientierung und geom. Sensitivität des Detektors

detektor pattern functions

Interferometer in xy-Ebene: $h(t) = \frac{1}{2}\left(h_{11}^{TT}(t) - h_{22}^{TT}(t)\right)$

$$\leadsto D^{ij} = \frac{1}{2}\left(e_x^i e_x^j - e_y^i e_y^j\right)$$



Rechnung ähnlich zu Üblatt 8

Ergebnis:

$$F_+ = \frac{1+\cos^2\theta_D}{2}\cos 2\phi_D$$

$$F_\times = \cos\theta_D \sin 2\phi_D$$

Viele Parameter in Wellenform:

- Richtung θ_D, ϕ_D, Abstand R
- Inklination des Orbits θ und Orientierung ϕ_0
- Verschmelzungszeitpunkt t_c und Phase ϕ_c
- Massen m_1, m_2
- Eigendrehimpulse/Spins $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ (6 Parameter!)
- Verformbarkeit (bei Neutronensternen) ...
- i.a. auch Exzentrizität e

$\leadsto$ Datenanalyse

Punkt im Parameterraum: $\vec{q}$

Dimension $\gtrsim 15$

HU WS2016 V14S2

Datenanalyse

Aufgaben:
- Detektion (inkl. Signifikanz)
- Parameterbestimmung (inkl. Fehler)

Problem: Rauschen $n(t) \approx$ GW $h_\xi(t)$, ξ^i: Parameter

gemessenes Signal: $s(t)=h_\xi(t)+n(t)$

Annahme: Gauß'sches Rauschen (z.B Schrotrauschen)

$$p(n) \propto \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{|\tilde{n}(f)|^2}{S_n(f)}\right], \quad S_n(-f)=S_n(f)$$

$p(n)$: Wahrscheinlichkeit, dass das Rauschen als $n(t)$ realisiert ist

S_n: Spektraldichte ~~von~~ des Rauschens

$$\langle \tilde{n}^*(f)\,\tilde{n}(f')\rangle = \delta(f-f')\frac{S_n(f)}{2}, \quad \tilde{n}^*(f)=\tilde{n}(-f) \text{ da } n\in\mathbb{R}$$

Ensemblemittelung ~ Zeitmittelung (bei stationärem Rauschen)

S_n wird für $h_\xi=0$ gemessen.

nicht-Gauß'sche Anteile im Rausche ~ "glitches" (Bild zeigen)
müssen identifiziert werden. i.d.R. passieren glitches nicht gleichzeitig in mehreren Detektoren, GW schon.

Notation: Skalarprodukt auf Funktionenraum

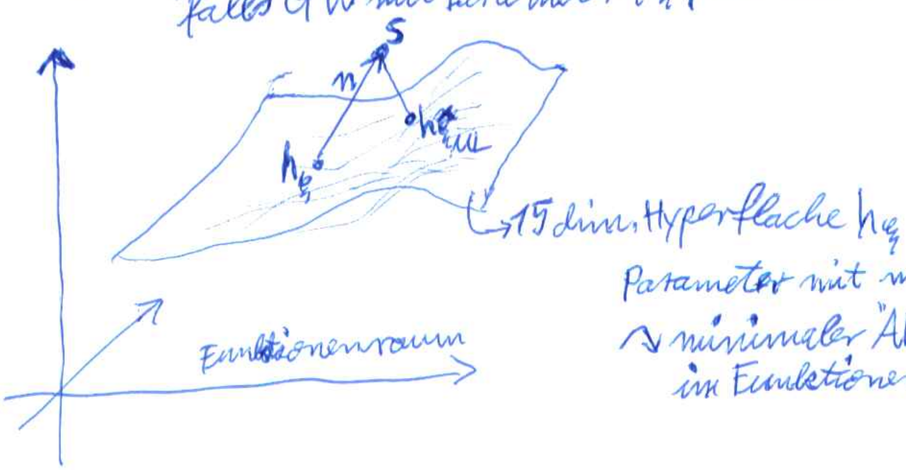
$$(A|B) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{2\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{S_n(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)+\tilde{A}(f)\tilde{B}^*(f)}{S_n(f)}$$

$\rightsquigarrow p(n) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(n|n)\right]$

Einsetzen: $n=s-h_\xi$

$\rightsquigarrow \underbrace{p(s|\vec{\xi})} \propto e^{-\frac{1}{2}(s-h_\xi|s-h_\xi)}$

bedingte Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit, dass s gemessen wird, falls GW mit Parametern $\vec{\xi}$ präsent ist.



Parameter mit maximaler Wahrscheinlichkeit ξ_{ML}
$\rightsquigarrow$ minimaler "Abstand" $(s-h_\xi|s-h_\xi)$ im Funktionenraum

HU WS2016 V1453

Satz von Bayes

Definition: $p(A|B) := \frac{p(A \wedge B)}{p(B)}$ ← Wahrscheinlichkeit für A und B

durch $p(B)$ teilen, da B als gegeben angenommen wird

$\Rightarrow p(A|B)p(B) = p(A \wedge B) = p(B|A)p(A)$

Satz von Bayes: $p(A|B) = \frac{p(B|A)\,p(A)}{p(B)}$

$p(A), p(B)$: "a-priori-Wahrscheinlichkeiten"

Anwenden auf $p(s|\vec{q})$:

$$p(\vec{q}|s) = \frac{p(\vec{q})}{p(s)} \underbrace{p(s|\vec{q})}_{\propto e^{(h_q|s) - \frac{1}{2}(h_q|h_q)} e^{-\frac{1}{2}(s|s)}}$$

s ist fix $\Rightarrow$ s-abhängige Terme in Normierung absorbieren

$$p(\vec{q}|s) \propto \underbrace{p(\vec{q})}\, e^{(h_q|s) - \frac{1}{2}(h_q|h_q)}$$

a-priori-Wahrscheinlichkeit, dass GW mit Parametern $\vec{q}$ entsteht
wichtig, falls $p(\vec{q}|s)$ "breit" verteilt ist (starkes Rauschen)
und $p(\vec{q})$ in diesem Bereich stark variiert, oder falls $p(\vec{q}) \approx 0$
↪ Beispiel: XKcd.com/1132 (Frequentistisch vs. Bayes)

Spezialfall: schwaches Rauschen

$p(\vec{q}|s)$ ist eng um Parameter mit maximaler Wahrscheinlichkeit q^i_{ML} verteilt $\Rightarrow p(\vec{q}) \to p(\vec{q}_{ML}) = \text{const}$ in Normierung absorbieren

$$p(\vec{q}|s) \propto e^{(h_q|s) - \frac{1}{2}(h_q|h_q)}$$

Bestimmung von $\vec{q}_{ML}$: exponent stationär

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial h_q}{\partial q^i}\middle| s\right) - \left(\frac{\partial h_q}{\partial q^i}\middle| h_q\right) = 0, \text{ nach } q^i = q^i_{ML} \text{ auflösen}$$

Parameterbestimmung:

Bayes-Schätzer für Parameter $q^i_B(s)$ bei gemessenem Signal s

$$q^i_B(s) = \int d\vec{q}\, q^i\, p(\vec{q}|s) \quad \text{(Erwartungswert)}$$

hochdimensionales Integral ⇝ Monte-Carlo-Methoden

bei kleinem Rauschen: $q^i_B \approx q^i_{ML}$

Fehlermatrix: $\Sigma^{ij}_B = \int d\vec{q}\, (q^i - q^i_B)(q^j - q^j_B)\, p(\vec{q}|s)$