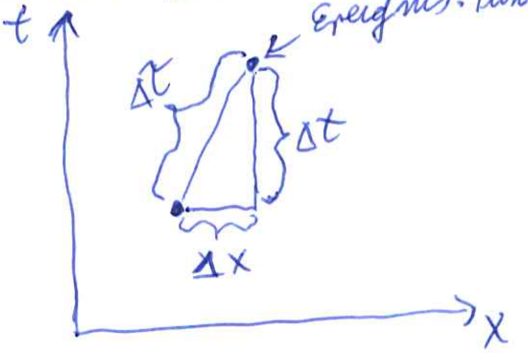
HU WS2016 V2S1

Vortrag: Rai Weiss
Aber: Dahlena lecture

Wiederholung: Relativitätstheorie

Die Raumzeit



Abstand in der Raumzeit $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \quad \text{(Axiom)}$$

Linienelement

"Pythagoras der Raumzeit"

$\Delta x, \Delta t$ sind Beobachterabhängig ("relativ")

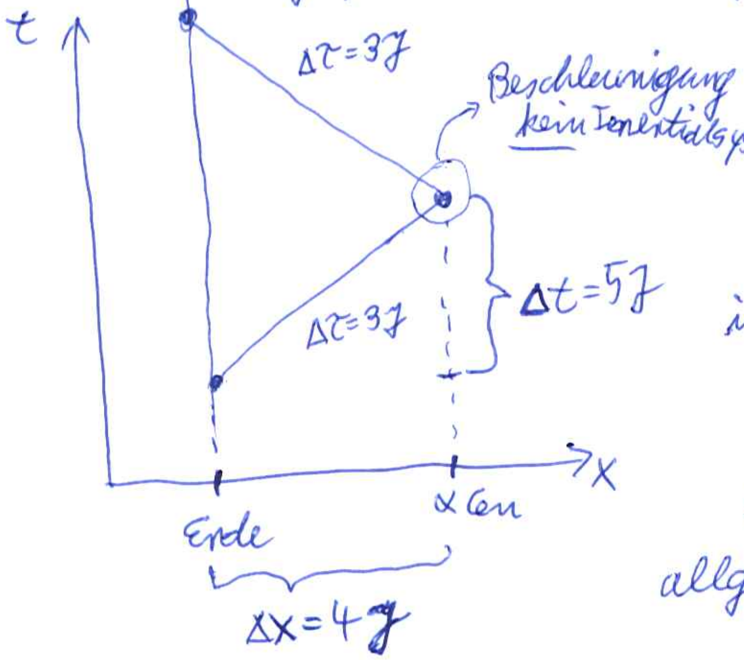
↳ ein anderer Beobachter ~~mißt~~ mißt i.a. $\Delta x', \Delta t'$

Aber: $\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta\tau^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2$

= invariant

Beispiel: Zwillingsparadoxon

J = Jahre = Lichtjahre (c=1)



$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$
$$= 25 - 16 = 9$$
$$\Leftrightarrow \Delta\tau = 3J$$

im Raumschiff

$$\Delta\tau = \Delta t'^2 - \underbrace{\Delta x'^2}_{0}$$

$$\Delta\tau = \Delta t = \text{Eigenzeit}$$

allgemeiner:

$$\Delta\tau^2 = \Big(1 - \overbrace{\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}}^{v^2}\Big) \cdot \Delta t^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Paradox: vom Raumschiff aus gesehen, geht die Zeit auf der Erde langsamer
" Erde " im Raumschiff "

Auflösung: Während das Raumschiff beschleunigt, holt die Zeit auf der Erde auf

$\boxed{\text{Vom Geometrischen Standpunkt aus (Raumzeitdiagramme) entstehen keine Paradoxien !}}$

↳ Diagramme im Inertialsystem betrachten

HU WS2016 V2p2

- Beschleunigungen ~~verrin~~/Kräfte verringern die Eigenzeit
- ↳ ~~kr~~ kräftefreie Bewegung ⇔ maximale Eigenzeit (Geodäten)

Äquivalenzprinzip(ien) (ÄP)

schwaches ÄP: schwere Masse = träge Masse (Galileo, Eötvös)

↳ Universalität des freien Falls: Gesetze der Mechanik sind gleich in frei fallenden Systemen und ohne Gravitation (lokal, d.h. hom. g-Feld)

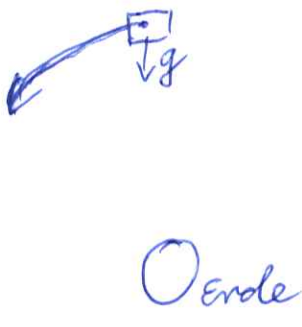
Einsteins ÄP: Gesetze der Mechanik → Gesetze der Physik $\forall$

⇝ Lichtstrahlen "fallen", Lichtablenkung Eddington & Dyson (1919)

(Anm.: starkes ÄP schließt Grav. ein)

Konsequenzen

folgende ~~Si~~ Situationen sind äquivalent:



freier Fall
≙ Kräftefreie Bewegung (Inertialsystem)
→ maximale Eigenzeit } deformiert / linienelle

Gravitation ⇝ ~~modifizierte $d\tau$~~

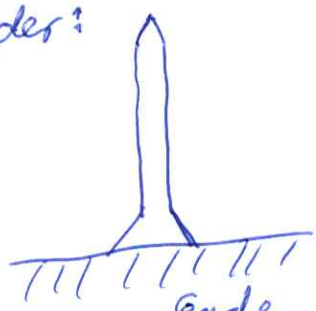
$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (Minus $\forall$)

~~⇝ modifizierte~~

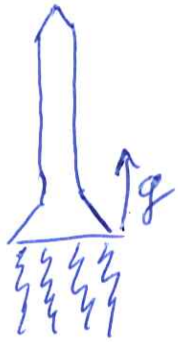
⇝ deformierte Metrik $g_{\mu\nu}$

HU WS2016 V2S3

Oder:



≙ äquivalent zu



Gravitationskraft auf der Erde ≙ Scheinkraft

"der Erdboden beschleunigt uns nach oben"

→ Verringerung der Eigenzeit (siehe Zwillingsparadoxe)

→ Verlangsamte Uhren im g-Feld (Rotverschiebung)

Differentialgeometrie

Physik

ÄP: (speziell relativistische) Gesetze der Physik gelten in frei fallenden (lokalen) Bezugssystemen

⇝ Koordinatensysteme

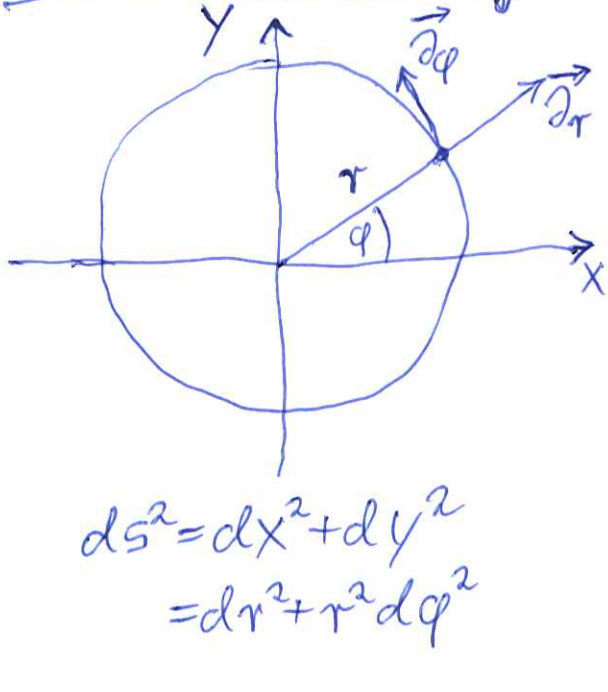
Mathematik

Prinzip der allg. Kovarianz: (Koordinateninvarianz)

Schreibe Gesetze der Physik in Koordinateninv. Form

↳ krummlinige Koordinaten

Kovariante Ableitung



$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad \text{oder: } \vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{\partial}_r = \frac{\partial \vec{q}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(nicht normiert)}$$

$$\vec{\partial}_\varphi = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \varphi} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$(\cancel{ds^2 = -dt^2}$

HU WS2016 V2S4

Allgemeine Struktur

$$\vec{\partial}_\mu = \frac{\partial \vec{q}}{\partial x^\mu}$$

~~$\vec{q}$: Vektor in~~

x^μ: krummlinige Koordinaten

~~damit $\mu = r, \varphi$ bzw. 1, 2~~

$$d\vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial x^\mu} dx^\mu = \vec{\partial}_\mu dx^\mu$$

$$\leadsto ds^2 = d\vec{q} \cdot d\vec{q} = \underbrace{\vec{\partial}_\mu \cdot \vec{\partial}_\nu}_{g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu$$

Raumzeit: $d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Ableitung eines Vektors $\vec{A} = A^\mu \vec{\partial}_\mu$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \vec{\partial}_\mu + A^\mu \underbrace{\frac{\partial \vec{\partial}_\mu}{\partial x^\nu}}_{\Gamma^\rho_{\mu\nu} \vec{\partial}_\rho} = \underbrace{\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} A^\rho \right)}_{\nabla_\nu A^\mu} \vec{\partial}_\mu$$

Zerlegung in Basis $\vec{\partial}_\mu$

$\nabla_\nu A^\mu$ Def. kovariante Ableitung

Formel: $\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta} \left(\partial_\nu g_{\delta\rho} + \partial_\rho g_{\delta\nu} - \partial_\delta g_{\rho\nu} \right)$ $\quad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$

$= \Gamma^\mu_{\nu\rho}$

Christoffel-Symbole, Formel funktioniert auch in gekrümmter Raumzeit !

$g^{\mu\delta}$: inverse Metrik

$g^{\mu\delta} g_{\delta\nu} = \delta^\mu_\nu$

HU WS2016 V2P5

Beispiel: Polarkoordinaten (oben)

$\mu = r, \varphi$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

nichtverschwindende Ableitung: $\partial_r g_{\varphi\varphi} = 2r$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \partial_r g_{\varphi\varphi}$$
$$= \frac{1}{2} r^{-2} \quad 2r = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} 2r = -r$$ alle anderen Γ sind null

Vergleiche:
$$\frac{\partial \vec{\partial}_\varphi}{\partial \varphi} = -r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = -r \vec{\partial}_r$$
$$\frac{\partial \vec{\partial}_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \vec{\partial}_\varphi$$
$$\frac{\vec{\partial}_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \vec{\partial}_\varphi$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial \vec{\partial}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \vec{\partial}_\rho}$$

Eigenschaften von ∇_μ: wie eine Ableitung

$$\nabla_\mu (A^\nu + B^\nu) = \nabla_\mu A^\nu + \nabla_\mu B^\nu$$
$$\nabla_\mu (F_{\alpha\beta} U^\beta) = (\nabla_\mu F_{\alpha\beta}) U^\beta + F_{\alpha\beta} \nabla_\mu U^\beta$$
$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 = \nabla_\mu g^{\alpha\beta}$$ Metrik-kompatibel

mehrere Indizes:
$$\nabla_\mu T^\alpha{}_\beta \equiv \frac{\partial T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} T^\rho{}_\beta - \Gamma^\rho_{\beta\mu} T^\alpha{}_\rho$$

oberer Index: $+\Gamma \ldots$

unterer Index: $-\Gamma \ldots$