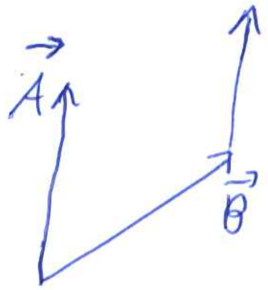
HU WS2016 V351

Wiederholung Relativitätstheorie, Teil 2

(Nachtrag:) Die kovariante Ableitung ∇_μ
(Eigenschaften) ← werden zu Axiomen

Paralleltransport eines Vektors $\vec{A}$ entlang eines Vektors $\vec{B}$



$\vec{A} = A^\mu \vec{\partial}_\mu$ ← krummlinige Basisvektoren

$\vec{B} = B^\mu \vec{\partial}_\mu$

$\vec{A}$ ändert sich nicht entlang $\vec{B}$ — Def. von ∇_ν

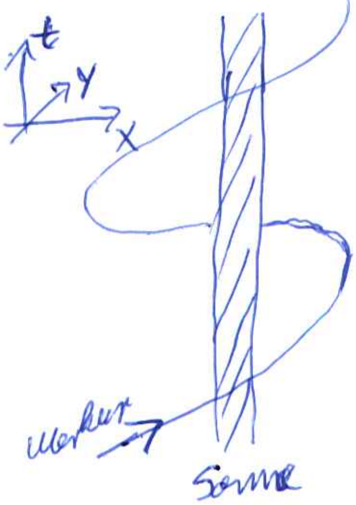
$\cancel{0 = B^\nu \nabla_\nu A^\varrho}$ $\quad 0 = B^\nu \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^\nu} = (B^\nu \nabla_\nu A^\varrho)\, \vec{\partial}_\varrho$

↑ krummlinige Koordinaten

⇝ $\boxed{B^\nu \nabla_\nu A^\varrho = 0}$ Der Operator $B^\nu \nabla_\nu$ ~~mißt~~ misst Änderung entlang B^ν

Geodäten

Motivation: freier Fall im Gravitationsfeld
≙ kräftefreie Bewegung
≙ Bewegung entlang einer "Geraden"
≙ Weg extremaler Länge
≙ Geodäte



Alle Massen, die sich in die selbe Richtung in der Raumzeit bewegen, haben die gleiche Bahn
(~~Äquivalenz~~ schwere Masse = träge Masse)

⇝ geometrische Beschreibung ∇

HU WS 2016 V3S2

Geodäte = Gerade = Paralleltransport eines Vektors entlang sich selbst
(Analogie: Gehen)

↳ $U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0$

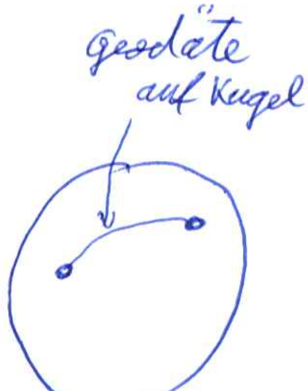
mit U^μ = Tangentialvektor zur "Geraden" $= \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$
= 4-Geschwindigkeit

Notation: $\dfrac{D}{D\tau} = U^\nu \nabla_\nu$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \frac{DU^\mu}{D\tau} = \underbrace{U^\nu}_{=\frac{dx^\nu}{d\tau}}\Big(\underbrace{\partial_\nu U^\mu}_{=\frac{dU^\mu}{dx^\nu}} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} U^\rho\Big)$$

$$= \frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} U^\nu U^\rho$$

Geodätengleichung



alternative Definition der Geodäten:
Weg extremaler Länge
- euklidisch: minimale Länge
- Raumzeit: maximale Länge (Eigenzeit)

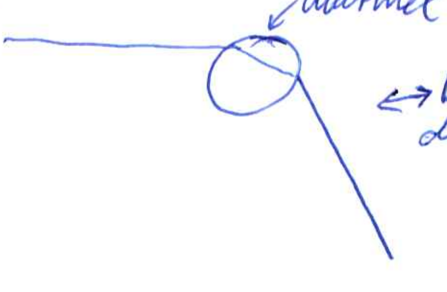
↳ $\tau = \int d\tau$ aus $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

bestimme Extremum: $0 = \delta\tau = \delta \int d\tau$

↳ Geodätengleichung (wie oben) (Details?)

Optik: Fermats Prinzip
↳ Lichtstrahlen bewegen sich entlang dem minimalen optischen Weg

$0 = \delta \underbrace{\int ds \cdot n}_{\text{opt. Weg}}$ ← Brechungsindex



↔ Bewegung der Planeten?

HU WS2016 V3S3

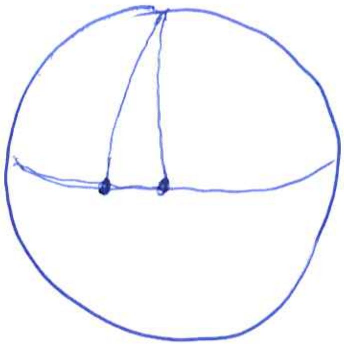
Zwischenstand:

- Kräftefreie Bewegung ⇝ Geodäte
- Gravitation ⇝ Metrik (gekrümmte Raumzeit)

$$\boxed{\text{Die Raumzeit sagt der Materie wie sie sich zu bewegen hat, und die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich zu krümmen hat}}$$

J.A. Wheeler

Wie beschreibt man Krümmung?



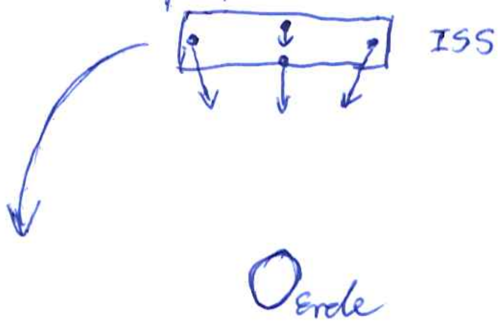
Parallele Geraden am Äquator bleiben nicht parallel

⇝ geodätische Abweichung B

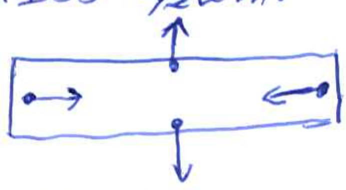
Anmerkung: Winkel im Dreieck i.a. nicht 180° (Gauss)

B Geodätische Abweichung

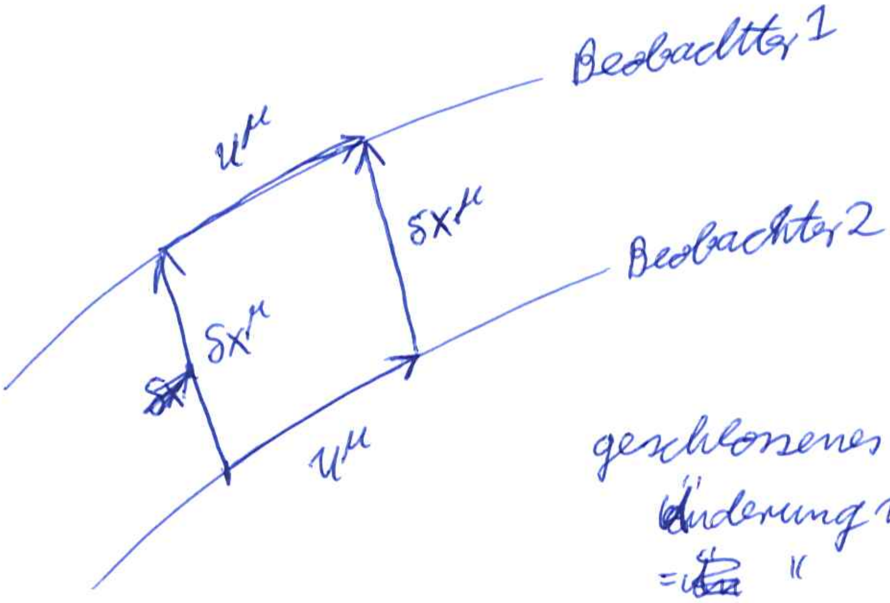
physikalische Motivation: Gezeitenkräfte (nichtlokal)



im ISS-System:



Gezeitenkräfte = relative Beschleunigung benachbarter, frei fallender Beobachter



geschlossenes Rechteck:

Änderung von u^μ entlang δx^μ

= " δx^μ " u^μ

⇝ $u^\mu \nabla_\mu \delta x^\nu = \delta x^\mu \nabla_\mu u^\nu$ (*)

Geodäten: $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ (**)

relative Beschleunigung:

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{D\tau^2} = u^\nu \nabla_\nu \big(\underbrace{u^\rho \nabla_\rho \delta x^\mu}_{\delta x^\rho \nabla_\rho u^\mu \quad (*)}\big)$$

Produktregel für ∇_ν

$$= \underbrace{u^\nu (\nabla_\nu \delta x^\rho)}_{\delta x^\nu \nabla_\nu u^\rho \quad (*)} \nabla_\rho u^\mu + u^\nu \delta x^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho u^\mu$$

$$= \delta x^\nu \underbrace{(\nabla_\nu u^\rho) \nabla_\rho u^\mu}_{\nabla_\nu (\underbrace{u^\rho \nabla_\rho u^\mu}_{=0 \quad (**)}) - u^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho u^\mu} + u^\nu \delta x^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho u^\mu$$

Produktregel für ∇_ν

$$= -\delta x^\nu u^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho u^\mu + u^\nu \delta x^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho u^\mu$$

umbenennen: $\nu \longleftrightarrow \rho$

$$= u^\nu \delta x^\rho \underbrace{(\nabla_\nu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu) u^\mu}_{\text{Def: } R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} u^\sigma + \underbrace{\ldots \nabla u}_{\text{ind}=0}}$$

$$= R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} u^\sigma u^\nu \delta x^\rho$$

HU WS2016 V355

Definition: Riemannscher Krümmungstensor $R^{\mu}{}_{\delta\nu\rho}$

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) u^\mu = R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}\, u^\delta$$

nach länglicher Algebra:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}$$

Krümmung $\longrightarrow$ geodätische Abweichung $\longrightarrow$ Gezeiten

Anmerkung: man kann Γ lokal zu null machen, aber i.a. nicht R

R ist ein Tensor, Γ nicht

Definitionen:
- Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$
- Ricci-Skalar $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu}$

Symmetrien:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0 \quad \text{(1. Bianchi Identität)}$$

$$\nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} = 0 \quad \text{(2. ")}$$

Vorschau: Krümmung $\hat{=}$ Energie-Impuls-Tensor (Bild komplett)