HU WS 2016 V4S1

Gravitationswellen

Beispiel: Wellen im Ozean

Welcher "Teil" des Wassers ~~zu~~ gehört zum Ozean und welcher zur Welle? ⇝ Näherung

1.) kleine Amplitude

2.) kleine Wellenlänge / hohe Frequenz

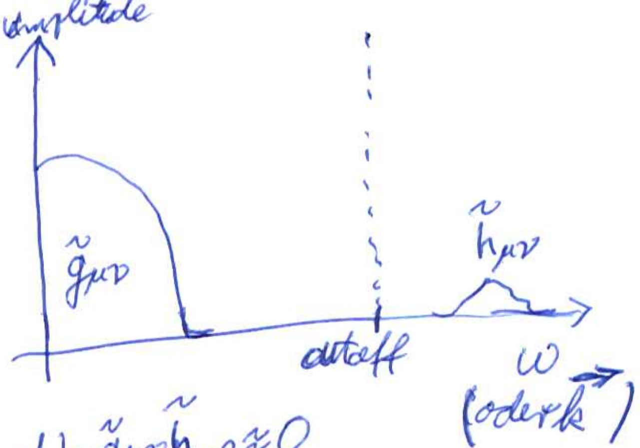
Gravitationswellen (GW):

(⇝ Übungsblatt)

Zerlegen: $g_{\mu\nu} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hintergrund}\\ \text{(wird auch durch GW gekrümmt)}}}{g_{\mu\nu}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Welle, klein}}}{h_{\mu\nu}}$

$\sim$: Fourier-Trafo

z.B.: $g_{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi}}_{\int_\omega} e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega,\vec{x})$



d.h. $\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{h}_{\alpha\beta} \approx 0$

Zerlegung $g_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ nicht beliebig ∇

cutoff in ω ⟷ Zeitmittelung

⟷ Projektion auf große Zeitintervalle

cutoff in $\vec{k}$ ⟷ Raummittelung

⟷ Projektion auf ~~gr~~ große Skalen

↳ Beide Situationen sind nicht immer gleichzeitig ~~gegeben~~ gerechtfertigt

z.B.: GW für LIGO hat ~ 300 Hz ≙ 1000 km

<u>nicht</u> kurz im Vergleich zu Grav.-Feld der Erde

<u>aber</u> hochfrequent !!

Zeitmittelung: $\langle f(t) \rangle = \int dt' f(t+t') C(t')$ Faltung mit cutoff-Funktion C

$= \int dt' \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} e^{-i\omega_1(t+t')} e^{-i\omega_2 t'} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{C}(\omega_2)$, $\omega_2 \to -\omega_2$ und $\tilde{C}(-\omega_2) = \tilde{C}(\omega_2)$ für $C \in \mathbb{R}$

HU WS2016 V4S2

$$\langle f\rangle = \int_{\omega_1}\int_{\omega_2} 2\pi\,\delta(\omega_1+\omega_2)\,\tilde f(\omega_1)\,\tilde C(\omega_2)\,e^{-i\omega_1 t} \qquad \delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{\pm i\omega t}$$

$$= \int_\omega \tilde f(\omega)\,\tilde C(\omega)\,e^{-i\omega t}$$

↖ ~~cutoff Filter~~ Tiefpassfilter im ω-Raum

z.B.: $\tilde C$ Gausskurve $\longleftrightarrow$ C Gausskurve inverser Breite

Problem: Definition des cutoffs nicht kovariant ↯

⇝ Problem der Mittelung

Pragmatische Lösung: Man kann explizit prüfen, ob Resultate von der Wahl von $\tilde C$ abhängen.

Es gibt kovariante Mittelungen, z.B. von Brill, Hartle (1964) (vgl. auch Edgar, Jackson / mikrolokal.)

Plan: Entwicklung der ~~Hil~~ Wirkung in $h_{\mu\nu}$ bis h^2

⇝ entspricht Variation mit $\delta g_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}$

$$\curvearrowright\ S \to S + \delta S + \frac{1}{2}\delta^2 S + \mathcal{O}(h^3)$$

Formeln: (Ü.blatt 1)

(1) $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}$

(2) $\delta g = g\cdot g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g = \underbrace{\frac{-g}{2\sqrt{-g}}}_{=+\frac{1}{2}\sqrt{-g}}\, g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

(3) $\delta R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \nabla_\alpha\,\delta\Gamma^\mu{}_{\beta\nu} - \nabla_\beta\,\delta\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}$

~~Zum Aufwärmen: erste Variation~~

Einstein-Hilbert Wirkung: ↗ ~~$S=\int d^4x$~~ $S=\frac{1}{16\pi}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R$ (+...) (Motivation: einfachste Wirkung mit Krümmungstensor)

↓

z.B. kosmo. Konstante, höhere Ordnungen in der Krümmung, ...

HU WS 2016 V4 S3

Zum Aufwärmen: erste Variation

$$\delta S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x \left(\delta\sqrt{-g}\, R + \sqrt{-g}\,\delta R\right), \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

$\delta\sqrt{-g} \to (2)$

$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$, $\delta g^{\mu\nu} \to (1)$, $\delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \to (3)$

NR: $g^{\mu\nu}\delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \left(\nabla_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu}\right) g^{\mu\nu}$ $\quad \alpha \leftrightarrow \nu$

$$= \nabla_\alpha\left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} g^{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\nu}{}_{\nu\mu} g^{\mu\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} R - R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{16\pi}\underbrace{\int d^4x \sqrt{-g}\,\nabla_\alpha(\ldots)}_{\text{Oberflächenterm} = 0}$$

NR: $\int d^4x \sqrt{-g}\,\nabla_\alpha(T^\alpha)$

$$= \int d^4x\, \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, T^\alpha\right) = \oint d^3x \sqrt{q}\, T^\alpha \approx 0$$

aus (2) und $\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\alpha g_{\mu\nu}$

$$= \frac{1}{16\pi}\int d^4x \sqrt{-g}\,\underbrace{\delta g_{\mu\nu}}_{h_{\mu\nu}}\underbrace{\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu}\right)}_{= -G^{\mu\nu} \text{ Einstein-Tensor}}$$

$\Rightarrow$ Einstein-Gleichungen (im Vakuum):

$$G^{\mu\nu} = 0$$

andere Schreibweise:

$$G^{\mu\nu} = P^{\mu\nu|\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

mit $P^{\mu\nu|\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}$

Spurumkehroperator

z. B. $\bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu|\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h$, $h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha}$

Spur: $\underbrace{\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha}}_{\bar{h} :=} = h^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\underbrace{\delta^{\alpha}_{\alpha}}_{4} h$

$$= -h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

$P_{\mu\nu|\alpha\beta} P^{\alpha\beta|\rho\sigma} = I^{\rho\sigma}_{\mu\nu} := \delta^{\rho}_{(\mu}\delta^{\sigma}_{\nu)}$

Einheitsoperator auf symmetrischen Matrizen

P: "Paritätsoperator" für die Spur