HU WS2016 V6S1

Hinweis Kolloquium, Di. 15:15

Die Eichung (Fortsetzung)

Eichtrafo: $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu}_{\delta h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}}$

Kann man immer die Eichung $\partial_\mu \bar h^{\mu\nu} = 0$ wählen? $\left(\bar h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h \right.$, $h = h^\rho{}_\rho$, $\left. = P_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\right)$

Ausgangspunkt: $f_\mu := \partial^\nu h_{\nu\mu} \neq 0$

Eichtrafo $\delta \bar h_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - g_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho$

⇝ $\partial^\nu \bar h'_{\nu\mu} = \underbrace{\partial^\nu \bar h_{\nu\mu}}_{f_\mu} + \partial^\nu \delta h_{\nu\mu} = f_\mu + \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu + \partial^\nu \partial_\mu \xi_\nu \underbrace{- g_{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\rho \xi^\rho}_{-\partial_\mu \partial^\nu \xi_\nu}$

$= f_\mu + \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu \overset{!}{=} 0$

⇝ $\partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu = -f_\mu$ Wellengl. für ξ_μ mit Quelle f_μ.
Hat i.A. eine Lösung

⇒ Man kann i.A. Eichtrafo ξ_μ finden,
sodass $\partial^\nu \bar h_{\nu\mu} = 0$ ist ✓
Und: Eichtrafo mit $\partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu$ bleibt in der Eichung $\partial^\nu \bar h_{\nu\mu} = 0$. (residuale Eichfreiheit)

Nichtlineare Version der Eichung

$$0 = \Gamma^{\mu\nu}{}_\nu \qquad (*)$$

g≈const. → $\approx \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial^\nu h_{\nu\rho} + \partial^\nu h_{\nu\rho} - \partial_\rho \overbrace{h^\nu{}_\nu}^{h}) + O(h^2)$

$= \partial^\nu h_\nu{}^\mu - \frac{1}{2} \partial^\mu h = \partial^\nu \underbrace{(h_\nu{}^\mu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu h)}_{\bar h_\nu{}^\mu}$

⇝ $\partial^\nu \bar h_\nu{}^\mu \approx 0$ stimmt mit obiger Eichung überein

Interpretation von (*):
Sei f Skalarfeld

$\Box f = \nabla_\nu \nabla^\nu f = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu f$

$= \partial^\nu \partial_\nu f + \underbrace{g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}}_{\Gamma^{\rho\nu}{}_\nu} \partial_\rho f$

Angewendet auf Koordinatenskalare X^μ:

$\Box X^\mu = \underbrace{\partial^\nu \partial_\nu X^\mu}_{\partial^\nu \delta^\mu_\nu = 0} + \Gamma^{\rho\nu}{}_\nu \underbrace{\partial_\rho X^\mu}_{\delta^\mu_\rho} = \Gamma^{\mu\nu}{}_\nu$

(*) ⇔ $\Box X^\mu = 0$ Koordinatenskalare erfüllen kovariante Wellengleichung
⇝ harmonische Eichung

HU WS2016 V6S2

Ebene monochromatische GW im Vakuum

Hier: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

Wellengleichung:

$$0 = \partial^\rho \partial_\rho \bar{h}_{\rho\sigma} = P_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \partial^\rho \partial_\rho h_{\alpha\beta} \qquad | P_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$$

$$0 = P_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} P_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \partial^\rho \partial_\rho h_{\alpha\beta} \underset{\text{ü. Blatt 4}}{=} \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} \qquad (1)$$

Eichbedingung:

$$0 = \partial^\nu \bar{h}_{\nu\mu} = \partial^\nu h_{\nu\mu} - \tfrac{1}{2} \partial_\mu h_\rho{}^\rho \qquad (2)$$

residuale Eichfreiheit:

$$\left.\begin{aligned} h'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \\ &\text{mit } \partial^\rho \partial_\rho \xi_\mu = 0 \end{aligned}\right\} (3)$$

Ansatz: ebene monochr. Welle für $h_{\mu\nu} \sim e^{ik_\alpha x^\alpha}$

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} + (c.c.) \qquad \text{analog für } h'_{\mu\nu}$$

$\hookrightarrow$ konstant, complex, $\tilde{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\nu\mu}$

Einsetzen in obige Gln: $\partial_\mu \longleftrightarrow ik_\mu$

(1): $-k^\rho k_\rho \tilde{h}_{\mu\nu} = 0$

$\curvearrowright k^\rho k_\rho = 0$ Dispersionsrelation $(\tilde{1})$

mit $(k^\mu) = (\omega, \vec{k})$: $-\omega^2 + \vec{k}^2 = 0$

(2): $k^\nu \tilde{h}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} k_\mu \tilde{h}_\rho{}^\rho$

muss auch für $\tilde{h}'_{\mu\nu}$ gelten: $k^\nu \tilde{h}'_{\nu\mu} = \frac{1}{2} k_\mu \tilde{h}'_\rho{}^\rho \qquad (\tilde{2})$

(3): $\xi_\mu = i \tilde{\xi}_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}$, $k^\rho k_\rho = 0 \Leftrightarrow \partial^\rho \partial_\rho \xi_\mu = 0$

dann aus (3): $\tilde{h}'_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + k_\mu \tilde{\xi}_\nu + k_\nu \tilde{\xi}_\mu \qquad (\tilde{3})$

O.B.d.A: Welle in positive x-Richtung: $(k^\mu) = (\omega, k, 0, 0)$, $k > 0$

$(\tilde{1})$: $\omega = k$

$\tilde{\xi}_\mu$ können beliebig gewählt werden, um $\tilde{h}_{\mu\nu}$ zu vereinfachen!

Wir fordern: transversale Welle $\boxed{\tilde{h}'_{1\mu} = 0}$ (keine Oszillation in Ausbreitungsrichtung)

nach $(\tilde{3})$: $\mu = 0$: $0 = \tilde{h}'_{10} = \tilde{h}_{10} + \underset{k}{k_1} \tilde{\xi}_0 + \underset{-k}{k_0} \tilde{\xi}_1 \qquad \curvearrowright \tilde{\xi}_0 = \frac{\tilde{h}_{10}}{k} + \tilde{\xi}_1$

$\mu = 1$: $0 = \tilde{h}'_{11} = \tilde{h}_{11} + 2k \tilde{\xi}_1 \qquad \curvearrowright \tilde{\xi}_1 = -\frac{\tilde{h}_{11}}{2k}$

$\mu = 2$: $0 = \tilde{h}'_{12} = \tilde{h}_{12} + k \tilde{\xi}_2 \qquad \curvearrowright \tilde{\xi}_2 = -\tilde{h}_{12}/k$

$\mu = 3$: $0 = \tilde{h}'_{13} = \tilde{h}_{13} + k \tilde{\xi}_3 \qquad \curvearrowright \tilde{\xi}_3 = -\tilde{h}_{13}/k$

$\longrightarrow \tilde{\xi}_\mu$ eindeutig bestimmt ↯

HU WS2016 V6S3

müssen noch $(\tilde{I})$ erfüllen:

$$\mu=1: \; k^\nu \underbrace{\tilde{h}'_{\nu 1}}_{0\text{ (transversal)}} = \tfrac{1}{2} k \, \tilde{h}'^{\ \rho}_{\rho} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\tilde{h}'^{\ \rho}_{\rho}=0} \text{ spurfrei}$$

$$(\tilde{I}) \longrightarrow k^\nu \tilde{h}'_{\nu\mu}=0$$

$$k^0 \tilde{h}'_{0\mu} + k^1 \underbrace{\tilde{h}'_{1\mu}}_{0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\tilde{h}'_{0\mu}=0}$$

dann: $(\tilde{h}'_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix}$ h_+ und $h_\times$: 2 unabhängige Polarisationen analog zu lin. Pol. in Edyn.

Zusammenfassung: transversal-spurfreie Eichung (jetzt ohne ' am h)

$$0=\tilde{h}_{1\mu} \text{ bzw. } k^i \tilde{h}_{ij}=0 \qquad \qquad \partial^i h_{ij}=0$$

$$\tilde{h}_\rho^{\ \rho}=0 \qquad \longleftrightarrow \qquad h_\rho^{\ \rho}=0$$

$$\tilde{h}_{0\mu}=0 \qquad \qquad h_{0\mu}=0$$

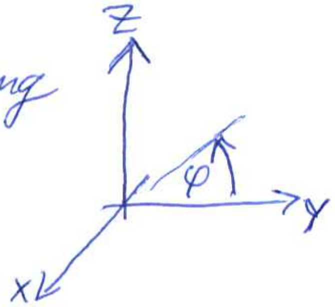
~~Zirkulare Polarisationen und Helizität~~

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h_+(e_y^\mu e_y^\nu - e_z^\mu e_z^\nu) + h_\times(e_y^\mu e_z^\nu + e_z^\mu e_y^\nu), \quad e_y^\mu=(0,0,1,0), \; e_z^\mu=(0,0,0,1) \qquad (*)$$

Zirkulare Polarisationen und Helizität

Betrachten Rotation um die Ausbreitungsrichtung

Trick: y, z Ebene auf Komplexe Ebene abbilden



$\hookrightarrow e_\pm^\mu = e_y^\mu \mp i e_z^\mu$ dann $e_\pm^\mu \xrightarrow{\text{Rotation}} e^{\pm i\varphi} e_\pm^\mu$

Umgekehrtes VZ
Rotation der Basis entgegen den Koordinaten

gleiches VZ

$$\rightsquigarrow e_y^\mu = \mathrm{Re}\, e_-^\mu = \tfrac12(e_+^\mu+e_-^\mu), \quad e_z^\mu = \mathrm{Im}\, e_-^\mu = \tfrac{i}{2}(e_+^\mu - e_-^\mu)$$

in (*): $e_y^\mu e_y^\nu = (e_+^\mu e_+^\nu + e_+^\mu e_-^\nu + e_-^\mu e_+^\nu + e_-^\mu e_-^\nu)\frac14$

$$-e_z^\mu e_z^\nu = +\tfrac14(e_+^\mu e_+^\nu - e_+^\mu e_-^\nu - e_-^\mu e_+^\nu + e_-^\mu e_-^\nu)$$

$$e_y^\mu e_z^\nu = \tfrac{i}{4}(e_+^\mu e_+^\nu - e_+^\mu e_-^\nu + e_-^\mu e_+^\nu - e_-^\mu e_-^\nu)$$

$$\rightsquigarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = \tfrac12 h_+(e_+^\mu e_+^\nu + e_-^\mu e_-^\nu) + \tfrac{i}{2} h_\times(e_+^\mu e_+^\nu - e_-^\mu e_-^\nu)$$

$$= \tfrac12 e_+^\mu e_+^\nu \underbrace{(h_+ + i h_\times)}_{\psi} + \tfrac12 e_-^\mu e_-^\nu \underbrace{(h_+ - i h_\times)}_{\bar{\psi}}$$

d.h. ~~$h_+ = h_+ \; h_\times$~~

HU WS2016 V6S4

rotieren:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \xrightarrow{\text{Rotation}} \frac{1}{2} e_+^\mu e_+^\nu e^{+i2\varphi}\Psi + \frac{1}{2} e_-^\mu e_-^\nu e^{-i2\varphi}\bar{\Psi}$$

Rotation verschiebt Phase von $\left\{\begin{matrix}\Psi \\ \bar{\Psi}\end{matrix}\right\}$ um $\left\{\begin{matrix}+2\varphi \\ -2\varphi\end{matrix}\right\}$.

~~Definition H entspricht zirkulärer~~

$\Psi/\bar{\Psi}$ entspricht zirkulärer Polarisation in d. Elektrodynamik

Definition Helizität H:

Ein Polarisationszustand Ψ, der unter Rotation um die Ausbreitungsrichtung nach

$$\Psi \to e^{iH\varphi}\Psi$$

transformiert, heißt Helizitätszustand und H reine Helizität.

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\Psi \\ \bar{\Psi}\end{matrix}\right\}$ hat Helizität $\left\{\begin{matrix}+2 \\ -2\end{matrix}\right.$