HRL WS 2016 V7 S1

Ebene monochromatische Welle (Fortsetzung) (TT)

Transformation zur transversal-spurfreien Eichung: $h_{\mu\nu} \to h^{TT}_{\mu\nu}$ ($= h'_{\mu\nu}$)

$$\tilde{h}^{TT}_{ij} = \tilde{h}_{ij} + k_i \tilde{\xi}_j + k_j \tilde{\xi}_i$$

für $\vec{k} = (k,0,0) \to \tilde{\vec{\xi}} = -\frac{1}{k}(\tilde{h}_{11}/2, \tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{13})$

allgemein: $\tilde{\xi}^i = -\frac{n^j}{k}\tilde{h}_j{}^i + \frac{1}{2k} n^i n^k n^l \tilde{h}_{kl}$

$n^i = \frac{k^i}{k}$ Richtung der Welle

$$\curvearrowright \tilde{h}^{TT}_{ij} = \tilde{h}_{ij} - n_i n^k \tilde{h}_{kj} - n_j n^l \tilde{h}_{il} + n_i n_j n^k n^l \tilde{h}_{kl}$$

können $\sim$ weglassen, ~~da Richtung auch im Ortsraum definiert ist~~. Dann:

$$\boxed{h^{TT}_{0\mu} = 0} \quad \boxed{h^{TT}_{ij} = \Lambda_i{}^k \Lambda_j{}^l h_{kl}}$$

mit $\Lambda_i{}^k = \delta_i^k - n_i n^k$ (Projektor transversal zur Welle)

für ebene Welle im Vakuum mit h_{kl} in harmonischer Eichung. Welle muss nicht monochrom. sein! (kein k in Gleichung)

Alternative Form:

$$h^{TT}_{ij} = h^{TT}_{ij} - \frac{1}{2}\Lambda_{ij} \underbrace{h^{TT}{}^k_k}_{0} \text{ (spurfrei)}$$

$$= \Lambda_{ij}{}^{kl} h_{kl}$$

mit $\Lambda_{ij}{}^{kl} = \Lambda_i{}^k \Lambda_j{}^l - \frac{1}{2}\Lambda_{ij}\Lambda^{kl}$ $\quad (\Lambda^{kl} h^{TT}_{kl} = \delta^{kl} h^{TT}_{kl})$

Eigenschaften: $\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij}$

$\Lambda_i{}^i{}_{kl} = 0$ (da $\Lambda_i{}^i = 2$, vgl. auch $h^{TT}{}_i{}^i = 0$, spurfrei)

$n^i \Lambda_{ijkl} = 0$ ($n^i h^{TT}_{ij} = 0$, transversal)

<u>Λ_{ijkl} projiziert auf den transversal spurfreien Anteil</u>

Formel für $\bar{h}_{\mu\nu}$, mit $h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\bar{h}^\mu{}_\mu$

$$h^{TT}_{ij} = \Lambda_{ij}{}^{kl}\bar{h}_{kl} - \frac{1}{2}\underbrace{\Lambda_{ij}{}^k{}_k}_{0}\bar{h}^\mu{}_\mu = \Lambda_{ij}{}^{kl}\bar{h}_{kl}$$

HU WS2016 V752

~~Gravitationswellen in der Fernzone~~ Energie-Impuls der GW

Definition $T^{\mu\nu}$: $\delta S_M = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$

↑ allg. Materiewirkung

Wirkung mit Materie und Eichfixierung für $h_{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,R + \frac{1}{64\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,h_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta\rho\sigma}g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma} + S_M + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

jetzt: variieren $\delta g_{\mu\nu}$ und $\delta h_{\mu\nu}$, aber beachten dass diese nicht beliebig sind:

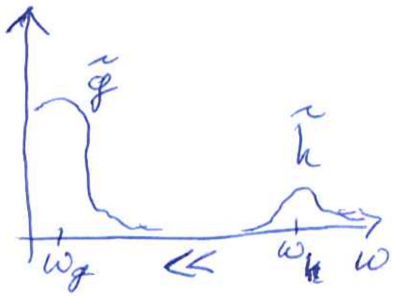
$\delta g_{\mu\nu}$ ist niederfrequent (NF)

→ Projektion auf kleine Frequenzen

→ Mittelung

$\delta h_{\mu\nu}$ ist hochfrequent

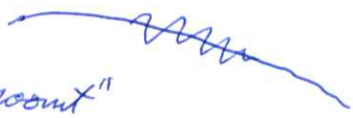
→ Projektion auf große Frequenzen



Variation $\delta h_{\mu\nu}$: siehe Blatt 4

$\partial^\rho\partial_\rho \bar h_{\mu\nu} = -16\pi\, T_{\mu\nu}^{HF}$ → Welle auf Hintergrund

↑ Quelle nur rein hochfreq. $\quad g_{\mu\nu} \approx$ const → "herangezoomt"



Variation von $\delta g_{\mu\nu}$

jetzt ohne Materie (einfacher) → $\partial^\rho\partial_\rho h_{\mu\nu} = 0$ (*)

$$\delta S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{64\pi}\int d^4x\left[\sqrt{-g}\,h_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma}\,\delta g^{\mu\nu} + \underbrace{\partial^\mu\partial_\mu h_{\rho\sigma}}_{=0\ (*)}\delta(\dots)\right]$$

↑ Einstein-Tensor

↝ $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{GW}$

mit $T_{\mu\nu}^{GW} = -\frac{1}{32\pi}P^{\alpha\beta\rho\sigma}\langle h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma}\rangle$

↑ Mittelung, Projektion auf NF

↑ NF, kann vor Mittelung gezogen werden

Anmerkung: erst die kleinen Skalen "ausintegrieren", dann die großen Skalen behandeln

⇝ effektive Theorien auf jeder Skala

Unter der Mittelung darf partiell integriert werden:

$$\partial_\mu\langle f\rangle = \int d^4x'\,\partial_\mu f(x^\mu + x'^\mu)\,C(x'^\mu) = \langle\partial_\mu f\rangle$$

↑ Cutoff-Funktion

$$0 \approx \partial_\mu\langle h_{\alpha\beta}\partial_\nu h_{\rho\sigma}\rangle = \langle\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\nu h_{\rho\sigma}\rangle + \langle h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma}\rangle$$

↑ da $\langle\dots\rangle$ langsam veränderlich

↝ $T_{\mu\nu}^{GW} = \frac{1}{32\pi}P^{\alpha\beta\rho\sigma}\langle\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\nu h_{\rho\sigma}\rangle$

$\partial^\mu T_{\mu\nu}^{GW} \approx 0$ aus (*)

HU WS2016 V7S3

für ebene Welle in TT-Form:

$$\boxed{T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\langle \partial_\mu h^{TT}_{ij}\,\partial_\nu h^{ij}_{TT}\rangle}$$ P weg, da spurfrei; $h^{TT}_{0\mu}=0$

gilt weit weg von der Quelle ⇝ ebene Welle (lokal)
↳ Fernzone

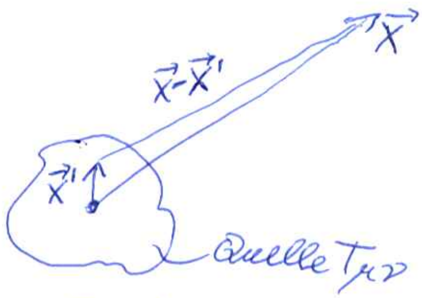
~~h^{TT}_{ij} in der Fernzone~~

GW in der Fernzone

Wellengl. und Lösung ($g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$)

GW	Edyn.
$\Box \bar h_{\mu\nu} = -16\pi T^{HF}_{\mu\nu}$	$\Box A^\mu = -4\pi j^\mu$
$\bar h_{\mu\nu} = 4\int d^3x' \frac{T^{HF}_{\mu\nu}(\vec x', t_{ret})}{\lvert\vec x-\vec x'\rvert}$	$A^\mu = \int d^3x' \frac{j^\mu(\vec x',t_{ret})}{\lvert\vec x - \vec x'\rvert}$

$t_{ret} = t - |\vec x - \vec x'|$



Fernzone: $|\vec x| \gg |\vec x'|$

$|\vec x - \vec x'| \approx |\vec x| = R$

$\leadsto \bar h_{\mu\nu} \approx \frac{4}{R}\int d^3x'\, T_{\mu\nu}(\vec x', t_{ret})$ ↗ HF weglassen; t_{ret} ⇝ $t-R$

benutzen: $\partial_\nu T^{\mu\nu}=0$ ⇝ $\partial_i T^{\mu i} = -\dot T^{\mu 0}$ (*)
$\dot{} = \partial_0$

und $\partial_k\partial_l(x^ix^j) = \partial_k(x^i\delta^j_l + \delta^i_l x^j) = \delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k$ (**)

NR: $\int d^3x\, T^{ij} = \int d^3x\, T^{kl}\frac12(\delta^i_k\delta^j_l+\delta^i_l\delta^j_k) \underset{(**)}{=} \frac12\int d^3x\, T^{kl}\,\partial_k\partial_l(x^ix^j)$

$\underset{\text{p.i.}}{=} \frac12\int d^3x\, \partial_k\partial_l T^{kl}\, x^ix^j \underset{(*)}{=} \frac12\int d^3x\, \ddot T^{00}x^ix^j = \frac12\frac{d^2}{dt^2}\int d^3x\, T^{00}x^ix^j$

$\leadsto \boxed{\bar h^{ij} \approx \frac{2}{R}\ddot M^{ij}(t_{ret})}$ mit $M^{ij} = \int d^3x\, T^{00}x^ix^j$
↳ Energie/Massendichte

vgl. Quadrupol: $Q^{ij} = \int d^3x\, T^{00}(x^ix^j - \frac13\delta^{ij}x^kx_k)$
$= M^{ij} - \frac13 M^k{}_k\delta^{ij}$

≈ ebene Welle in Fernzone (lokal)
↳ Projektion auf TT-Form, mit $n^i = \frac{x^i}{R}$ (Ausbreitungsrichtung)

$h^{TT}_{ij} = \Lambda_{ijkl}\bar h^{kl} = \frac{2}{r}(\cancel{\Lambda_{ijkl}\ddot M^{kl} - \Lambda_{ijk}{}^{k}\frac13\ddot M^l{}_l})$

$$\boxed{h^{TT}_{ij} \approx \frac2R \Lambda_{ijkl}\ddot M^{kl}(t_{ret}) = \frac2R\Lambda_{ijkl}\ddot Q^{kl}(t_{ret})}$$ Quadrupolnäherung. $t_{ret}\approx t-R$

↳ $\Lambda_{ijk}{}^k=0$