HU WS2016 V851

Quadrupolformel

Abgestrahlte Leistung ~ Energieverlust/Zeit ~ Leuchtkraft $\mathcal{L}$

Energiestromdichte: T^{0i}_{GW}

$$\mathcal{L} = \oint d\Omega \cdot R^2 n^i T^{0i}_{GW}$$

$$T_{0i} = -T^{0i} \rightarrow \; = -\frac{1}{8} R^2 \oint \frac{d\Omega}{4\pi} n^i \langle \dot h^{TT}_{kl} \partial_i h^{TT}_{kl} \rangle$$

(wg. ca. ebene Welle für $R \to \infty$

$\approx k_i h^{TT}_{kl} \sim n_i \underset{-k_0}{\omega} n_i h^{TT}_{kl} \sim -n_i \dot h^{TT}_{kl}$

$$= +\frac{1}{8} R^2 \oint \frac{d\Omega}{4\pi} \langle \dot h^{TT}_{kl} \dot h^{TT}_{kl} \rangle$$

$$h^{TT}_{ij} = \Lambda_{ijkl} \frac{2}{R} \ddot Q^{kl}(t_{ret})$$

$$= \frac{1}{2} \langle \dddot Q_{ij} \dddot Q_{kl} \rangle \oint \frac{d\Omega}{4\pi} \Lambda_{ijkl}$$

$$\Lambda \Lambda = \Lambda$$

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ik}\Lambda_{jl} - \frac{1}{2}\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}, \quad \Lambda_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$$

NR: $\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = c_2 \delta_{ij}$ (wg. Rotationssymmetrie)

$|\delta_{ij} \Rightarrow 1 = c_2 \cdot 3 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = c_4 (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$|\delta_{ij}\delta_{kl} \Rightarrow 1 = c_4(9+3+3) \Rightarrow c_4 = \frac{1}{15}$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \Lambda_{ijkl} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik} n_j n_l - n_i n_k \delta_{jl} + n_i n_j n_k n_l$$
$$- \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\delta_{ij} n_k n_l + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l \Big)$$

Terme mit δ_{ij} und δ_{kl} fallen weg, da Q_{ij} spurfrei

$$= \delta_{ik}\delta_{jl} - c_2 \delta_{ik}\delta_{jl} - c_2 \delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{1}{2} c_4 (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + ?\,\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$= \frac{11}{30}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{1}{30}\delta_{ik}\delta_{jl} + ?\,\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{5} \langle \dddot Q_{ij} \dddot Q_{ij} \rangle}$$ Quadrupolformel

Energiebilanz: $\frac{dE}{dt} = -\mathcal{L} = -\frac{1}{5} \langle \dddot Q_{ij} \dddot Q_{ij} \rangle$

HU WS 2016 VB 52

Strahlungsrückwirkung

Newtonsche Mechanik: $E = \text{const}$

Korrektur: $\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5}\langle \dddot{Q}^2 \rangle$

~~Was~~ Wie sieht die dissipative Korrektur zur Kraft aus?

~~$t_{ret} \ll t$ instantane Wechselwirkung, Newtonscher Fall Näherung~~

Hier: "Newtonsche Näherung"

$\Delta t \gg t_{ret}$ instantane Wechselwirkung

Energieverlust durch dissipative Kraft F^i_{diss}:

$$\frac{dE}{dt} = \text{"}\langle F^i_{diss} V^i \rangle\text{"}$$

$$= \langle \int d^3x\, \underbrace{f^i_{diss}}_{\text{Kraftdichte pro Massendichte}} \overbrace{T^{0i}}^{\text{Energiestrom} \sim \rho v^i} \rangle$$

Vergleiche mit

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5}\langle \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}^{ij} \rangle \qquad Q^{ij} = \int d^3x\, T^{00} x^i x^j - \text{Spur}$$

$$\underset{\text{p.i. unter } \langle\dots\rangle}{=} -\frac{1}{5}\langle \overset{(5)}{Q}_{ij} \dot{Q}^{ij} \rangle \qquad \overset{(n)}{\dots} = \frac{d^n \dots}{dt^n}$$

$\dot{Q}^{ij} \to \int d^3x\, \underbrace{\partial_0 T^{00}}_{-\partial_k T^{k0}} x^i x^j - \text{Spur}$ da $0 = \partial_\nu T^{\nu\mu} = \partial_0 T^{0\mu} + \partial_k T^{k\mu}$

$$= +\frac{1}{5}\langle \int d^3x\, \overset{(5)}{Q}_{ij} x^i x^j \partial_k T^{k0} \rangle$$

$$\underset{\text{p.i.}}{=} \langle \int d^3x\, f^k_{diss} T^{0k} \rangle$$

mit $\boxed{\begin{aligned} f^k_{diss} &= -\partial_k V_{diss} = -\frac{2}{5}\overset{(5)}{Q}{}^{kj} x^j \\ V_{diss} &= +\frac{1}{5}\overset{(5)}{Q}_{ij}(t)\, x^i x^j \end{aligned}}$

Burke-Thorne Potential explizit zeitabhängig $\hookrightarrow$ dissipativ!

Änderung des Gesamtimpulses P^i:

$$\frac{dP^i}{dt} = \text{"}\langle F^i_{diss} \rangle\text{"} = \langle \int d^3x\, f^i_{diss} \overset{\sim \rho}{T^{00}} \rangle$$

$$= -\frac{2}{5}\langle \overset{(5)}{Q}{}^{ij} \underbrace{\int d^3x\, x^j T^{00}}_{\sim \text{Schwerpunkt, O.B.d.A.: } 0} \rangle$$

$= 0$ kein Rückstoß durch GW in der Quadrupolnäherung

Aber: beim Verschmelzen schwarzer Löcher sind große Rückstöße möglich! (bis zu 5000 $\frac{km}{s}$)

HU WS2016 V8S3

Änderung des Gesamtdrehimpulses L^i:

$$\frac{dL^i}{dt} = \text{"}\langle \varepsilon^{ikl} x^k F^l_{diss} \rangle\text{"} = \varepsilon^{ikl} \langle \int d^3x\, x^k f^l_{diss} T^{00} \rangle$$

$$= -\frac{2}{5} \varepsilon^{ikl} \langle \overset{(5)}{Q}{}^{lj} \underbrace{\int d^3x\, x^k x^j T^{00}}_{Q^{kj} + \cancel{\frac{1}{3}\delta^{kj}\,\text{Spur}}} \rangle \qquad \text{da } \varepsilon^{ikl} Q^{lk} = 0$$

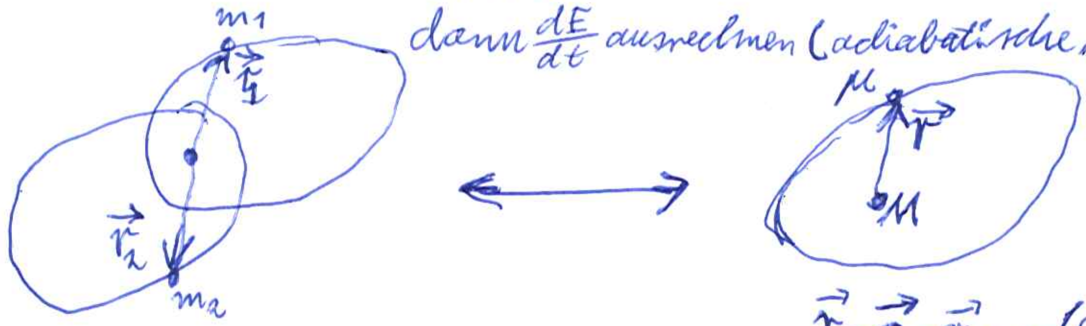
$$= -\frac{2}{5} \varepsilon^{ikl} \langle Q^{kj} \overset{(5)}{Q}{}^{lj} \rangle$$

$$\underset{\text{p.i. in} \langle\rangle}{=} -\frac{2}{5} \varepsilon^{ikl} \langle \ddot{Q}^{kj} \dddot{Q}^{lj} \rangle$$

~~Anmerkung: auf Üblatt 7 → Punktmassen~~

$$\cancel{T^{00} \approx \rho \approx m_1 \delta(\vec{x} - \vec{r}_1) + m_2 \delta(\vec{x} - \vec{r}_2)}$$

Beispiel: Binärsystem. $\dddot{Q}$ nach Newtonscher Mechanik, dann $\frac{dE}{dt}$ ausrechnen (adiabatische Näherung)



$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$

$M = m_1 + m_2$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Punktmassen: $T^{00} \approx \rho \approx m_1 \delta(\vec{x} - \vec{r}_1) + m_2 \delta(\vec{x} - \vec{r}_2)$

$$\rightsquigarrow M^{ij} = m_1 r_1^i r_1^j + m_2 r_2^i r_2^j$$

$$M^{ij} = m_1 \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 r^i r^j + m_2 \left(\frac{m_1}{M}\right) r^i r^j$$

$$= \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} r^i r^j = \mu r^i r^j$$

$M^{11} = \mu r^2 \cos^2\phi$, $M^{22} = \mu r^2 \sin^2\phi$, $M^{12} = M^{21} = \mu r^2 \cos\phi \sin\phi$

Anmerkung: $M^{11} \sim \cos 2\phi \sim M^{22}$, $M^{12} \sim \sin 2\phi$

$h \sim \ddot{M}$ ⇝ Phase der GW ≈ 2 · Phase des Orbits

Frequenz " ≈ 2 · Freq. "

Ab jetzt: Kreisbahn $\phi = \omega \cdot t$ mit $\omega^2 r^3 = M$ (3. Kepler'sches Gesetz, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

Allgemeiner Fall: Blatt 7

Exzentrizität nimmt stark ab durch Abstrahlung der GW

⇝ Orbit wird näherungsweise kreisförmig