Darstellungen semidirekter Produkte

Jan Steinhoff

21. Juli 2006

Zuerst werden die irreduziblen unitären Darstellungen der Poincaré Gruppe hergeleitet, dann wird das Vorgehen verallgemeinert auf beliebige semidirekte Produkte mit abelschem Normalteiler. Als Literatur wurde [1–3] verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

Sei G eine Gruppe mit Gruppenwirkung auf eine Menge M und $x \in M$. Der *Orbit* (*Bahn*) von x ist dann gegeben durch $Gx = \{gx|g \in G\}$. Die *Isotropiegruppe* (*Stabilisator*, *kleine Gruppe*) von x ist definiert als $G_x = \{g \in G|gx = x\}$.

Ist N Normalteiler einer Gruppe G (d.h. $N \lhd G$), H eine Untergruppe von G und lässt sich jedes Element von G eindeutig als Produkt eines Elementes von N mit einem Element von H schreiben, dann heißt G *semidirektes Produkt* von N und H (d.h. $G = H \ltimes N$). Da N ein Normalteiler von G ist, ist die Operation $\tau(h)n = hnh^{-1}$ für jedes $h \in H$ ein Automorphismus von N

($n \in N$). Schreibt man nun die $g_i \in G$ als $g_i = n_i h_i$ mit $n_i \in N$ und $h_i \in H$, dann erhält man für das Produkt von g_1 und g_2:

$$\begin{aligned} g_2 g_1 &= n_2 h_2 n_1 h_1 = n_2 h_2 n_1 h_2^{-1} h_2 h_1 \\ &= (n_2 \tau(h_2) n_1)(h_2 h_1) \end{aligned} \tag{1}$$

Für $g_3 = g_2 g_1$ hat man also $n_3 = n_2 \tau(h_2) n_1$ und $h_3 = h_2 h_1$. Es folgt ausserdem, dass man $g = nh$ auch eindeutig als $g = hn'$ mit $n' = h^{-1} n h$ schreiben kann.

Hat man umgekehrt zwei Gruppen N und H vorgegeben sowie eine Abbildung τ von H nach $\mathrm{Aut}(N)$, so kann man das (äussere) semidirekte Produkt $G = H \ltimes_\tau N$ bilden, indem man gemäß (1) eine Multiplikation auf $N \times H$ wie folgt definiert:

$$(n_2, h_2)(n_1, h_1) = (n_2 \tau(h_2) n_1, h_2 h_1) \tag{2}$$

Identifiziert man n mit (n, e_H) und h mit (e_N, h), dann hat man natürlich wieder $hnh^{-1} = \tau(h)n$.

Ein Beispiel für ein semidirektes Produkt ist die im nächsten Abschnitt besprochene Poincaré Gruppe. Ein Vierervektor x transformiert unter der Poincaré Gruppe in den Vektor $x' = \Lambda_1 x + a_1$. Hier ist Λ_1 die Matrix einer Lorentztransformation und a_1 ein Vierervektor, der eine Translation in der Raumzeit beschreibt. Führt man noch eine weitere Lorantztransformation aus, dann erhält man:

$$x'' = \Lambda_2 x' + a_2 = \Lambda_2 \Lambda_1 x' + a_2 + \Lambda_2 a_1$$

Schreibt man ein Element der Poincaré Gruppe nun als Paar (a, Λ), so sieht man durch Vergleich mit (2), dass sie ein semidirektes Produkt ist (τ bildet einfach ein abstraktes Element der Lorentzgruppe H auf die entsprechende Matrix Λ ab, die ein Automorphismus auf der Raumzeit und damit auf der Translationsgruppe N ist).

2 Darstellungen der Poincaré Gruppe

In der Quantenphysik wird die Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen ersetzt durch ihre universelle Überlagerungsgruppe, die $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$. Da die universelle Überlagerungsgruppe einfach zusammenhängend ist, kann man dann von projektiven Darstellungen zu gewöhnlichen Darstellungen übergehen [2]. Elementarteilchen bzw. deren Zustandsvektoren müssen nach irreduziblen Darstellungen der Poincaré Gruppe transformieren, durch eine Klassifizierung dieser irreduziblen Darstellungen erhält man also eine Klassifizierung der möglichen Elementarteilchen [2].

Einem beliebigen Vierervektor $p \in \mathbb{R}^{1,3}$ kann folgendermaßen bijektiv eine hermitesche Matrix zugeordnet werden:

$$P = p_\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 + ip_2 \\ p_1 - ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Hier sind die σ^i die Paulimatrizen und σ^0 die Einheitsmatrix. Es gilt:

$$\det P = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = p^2$$

Man lässt nun eine Matrix $A \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$, also eine komplexe 2×2 Matrix mit $\det(A) = 1$, folgendermaßen auf P wirken:

$$\tau(A)P = APA^\dagger \tag{4}$$

Die Matrix bleibt so hermitesch und die Determinante bleibt unverändert, τ ist also ein Homomorphismus von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$ in die Lorentzgruppe. Jede Lorentztransformation ist wiederum ein Automorphismus von $\mathbb{R}^{1,3}$. Man kann also das semidirekte Produkt $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C}) \ltimes_\tau \mathbb{R}^{1,3}$ bilden. Dabei beschreibt $\mathbb{R}^{1,3}$ eine Translation in der Raumzeit. Wenn man von Spiegelungen absieht, ist G somit die Quanten-Version der Poincare Gruppe. Im folgenden werden die Abkürzungen $N = \mathbb{R}^{1,3}$ und $H = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$ verwendet.

2.1 Charaktere der Translationsgruppe

Ein *Charakter* χ einer kontinuierlichen Gruppe L ist ein stetiger Homomorphismus von L nach $\mathbb{C}^*$, d.h. $\chi(l_1 l_2) = \chi(l_1)\chi(l_2)$ für alle $l_1, l_2 \in L$. Zusätzlich wird hier gefordert, dass χ *unitär* sein soll, d.h. $|\chi| \equiv 1$. Die Menge der unitären Charaktere von L wird mit $\mathrm{Char}(L)$ bezeichnet.

Da die Translationsgruppe $N = \mathbb{R}^{1,3}$ abelsch ist, sind die irreduziblen unitären Darstellungen eindimensional und somit durch $\mathrm{Char}(N)$ gegeben. Sind $n_i \in N$ die abstrakten Gruppenelemente und $w_i \in \mathbb{R}^{1,3}$ die zugeordneten Vektoren, dann lautet die Forderung, dass χ ein Homomorphismus sein soll, folgendermaßen:

$$\chi(w_1 + w_2) = \chi(w_1)\chi(w_2)$$

Diese Gleichung wird durch die Exponentialfunktion gelöst. Da χ ausserdem stetig und unitär sein soll, können sämtliche Lösungen geschrieben werden als:

$$\chi_p(w) = e^{ip \cdot w} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{R}^{1,3} \tag{5}$$

Der Raum der unitären Charaktere kann also mit $\mathbb{R}^{1,3}$ identifiziert werden.

2.2 Zurückführung auf Darstellungen der kleinen Gruppe

Eine irreduzible Darstellung ρ der Poincaré Gruppe G über einem Vektorraum V zerfällt in mehrere irreduzible Darstellungen der Translationsgruppe

N. Man kann also eine Basis $v_{p\sigma}$ von V so wählen, dass für $n \in N$ gilt:

$$\rho(n)v_{p\sigma} = \chi_p(n)v_{p\sigma} \tag{6}$$

Dann gilt für jedes $g \in G$:

$$\begin{aligned}\rho(n)\rho(g)v_{p\sigma} &= \rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(n)\rho(g)v_{p\sigma} \\ &= \rho(g)\rho(g^{-1}ng)v_{p\sigma} \\ &= \rho(g)\chi_p(g^{-1}ng)v_{p\sigma}\end{aligned}$$

Es macht nun Sinn, die Wirkung eines $g \in G$ auf die Charaktere durch $(g\chi_p)(n) = \chi_p(g^{-1}ng)$ zu definieren. Dies wird auch dadurch motiviert, dass die Wirkung von $h^{-1} \in H$ auf ein Element $n \in N$ durch $h^{-1}nh$ gegeben ist. Da N abelsch ist, bringt sie keinen Beitrag zur Wirkung von G auf ein χ. Es gilt dann mit der so definierten Gruppenwirkung:

$$\rho(n)\rho(g)v_{p\sigma} = (g\chi_p)(n)\rho(g)v_{p\sigma} \tag{7}$$

Ein Vergleich von (7) mit (6) ergibt, dass $\rho(g)v_{p\sigma}$ in dem $g\chi_p$ zugeordnenten Unterraum liegt. Die Orbits von χ unter G entsprechen also invarianten Unterräumen. Will man irreduzible Darstellungen finden, dann kann man sich auf *einen* Orbit der Charaktere beschränken. Aufgrund der speziellen Form der Charaktere der Translationsgruppe (5) gilt $g\chi_p = \chi_{\tau(g)p}$, wobei $\tau(g)p$ die zu g gehörende Lorentztransformation (also ohne Translation) von p ist. Die Orbits der Charaktere sind somit mit denen der Lorentztransformation im $\mathbb{R}^{1,3}$ identisch. Der Ursprung $p = 0$ bildet natürlich einen Orbit. Die restlichen Orbits können charakterisiert werden durch $m^2 \equiv p_\mu p^\mu$ sowie durch das Vorzeichen von p_0. Da die Gruppenwirkung auf den Orbits transitiv ist, genügt es einen Repräsentanten χ_k pro Orbit anzugeben, die restlichen Charaktere können dann über die Gruppenwirkung erzeugt werden, d.h. zu jedem p in einem Orbit mit Repräsentant k gibt es ein $h_p \in H$, so dass $\chi_p = h_p\chi_k$ bzw. $p = \tau(h_p)k$. Die Orbits und eine mögliche Wahl der Repräsentanten k sowie den nach (3) zugeordneten Matrizen K ist:

Orbit	k	K	H_{χ_k}
$m^2 > 0, p_0 > 0$	$(m, 0, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$	SU(2)
$m^2 > 0, p_0 < 0$	$(-m, 0, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$	SU(2)
$m^2 = 0, p_0 > 0$	$(1, 0, 0, 1)$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{U}(1) \ltimes \mathbb{C}$
$m^2 = 0, p_0 < 0$	$(-1, 0, 0, -1)$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{U}(1) \ltimes \mathbb{C}$
$p = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$
$m^2 < 0$	$(0, 0, \lvert m\rvert, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & \lvert m\rvert i \\ -\lvert m\rvert i & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$

Die Bedeutung der ebenfalls aufgeführten Isotropiegruppe H_{χ_k} wird nun gezeigt. Diese wird auch *kleine Gruppe* genannt und im nächsten Abschnitt bestimmt. Für $m = 0$ ist die Abbildung τ des Produktes $\mathrm{U}(1) \ltimes \mathbb{C}$ allerdings nicht einfach dadurch gegeben, dass ein Element aus $\mathbb{C}$ mit einem Element aus U(1) multipliziert wird, sondern mit dem Quadrat des Elementes aus U(1) (wird auch im nächsten Abschnitt gezeigt).

Der Index σ in $v_{p\sigma}$ kann noch umdefiniert werden, da er bis jetzt noch nicht genutzt wurde. Man darf daher folgende Wahl treffen:

$$v_{p\sigma} = \rho(h_p)v_{k\sigma} \tag{8}$$

Da ein beliebiges Gruppenelement von G als nh geschrieben werden kann und die Wirkung von $\rho(n)$ auf die $v_{p\sigma}$ bereits durch (6) gegeben ist, muss nur noch $\rho(h)$ bestimmt werden. Man wählt nun eine irreduzible Darstellung s von H_{χ_k}. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \rho(h)v_{p\sigma} &= \rho(hh_p)v_{k\sigma} \\ &= \rho(h_{\tau(h)p})\rho(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)v_{k\sigma} \\ &= \rho(h_{\tau(h)p})s(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)v_{k\sigma} \end{aligned} \tag{9}$$

Hier wurde genutzt, dass $h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p \in H_{\chi_k}$ ist, denn:

$$\begin{aligned} \tau(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)k &= \tau(h_{\tau(h)p}^{-1})\tau(h)p \\ &= \tau(h_{\tau(h)p}^{-1})\tau(h_{\tau(h)p})k \\ &= k \end{aligned} \tag{10}$$

s wirkt nur auf den Index σ und $\rho(h_{\tau(h)p})$ gemäß (8) nur auf den Index k, die Darstellung ρ ist also nach (9) durch s festgelegt. Schreibt man $s(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)$ als Matrix[1] $s_{\bar{\sigma}\sigma}(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)$, so wird dies noch deutlicher:

$$\begin{aligned} \rho(h)v_{p\sigma} &= \rho(h_{\tau(h)p})\; s_{\bar{\sigma}\sigma}(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)\; v_{k\bar{\sigma}} \\ &= s_{\bar{\sigma}\sigma}(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)\; \rho(h_{\tau(h)p})v_{k\bar{\sigma}} \\ &= s_{\bar{\sigma}\sigma}(h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p)\; v_{\tau(h)p\,\bar{\sigma}} \end{aligned} \tag{11}$$

Man sagt die Darstellung von H wird durch diejenige von H_{χ_k} induziert. Das Ergebnis ist unanhängig von der Wahl des Repräsentanten k. Wenn man einen anderen Repräsentanten p wählt und dessen Isotropiegruppe betrachtet, d.h. $p = \tau(h)p$, dann sieht man an (8), dass die Isotropiegruppen von k und p isomorph sind ($H_{\chi_p} = h_p H_{\chi_k} h_p^{-1}$, man beachte die Reihenfolge der Faktoren). Durchläuft nun h die Gruppe H, dann werden alle Kombinationen an Elementen $h_{\tau(h)p}^{-1}hh_p \in H_{\chi_k}$ und Charakteren $\chi_{\tau(h)p}$ des Orbits von

[1] Weil die $v_{k\sigma}$ Basisvektoren und keine Komponenten eines Vektors sind, ist die Reihenfolge der Indizes durch $s(h)v_{k\sigma} = s_{\bar{\sigma}\sigma}v_{k\bar{\sigma}}$ gegeben, so dass $s_{\bar{\sigma}\sigma}(h_2h_1) = s_{\bar{\sigma}\kappa}(h_2)s_{\kappa\sigma}(h_1)$ gilt.

χ_k durchlaufen, aus der Irreduzibilität von s folgt somit die Irreduzibilität des dazugehörigen ρ.

Man bekommt also durch Wahl eines Orbits der Charaktere und durch Wahl einer irreduzilen Darstellung der kleinen Gruppe eine irreduzible Darstellung von G. Startet man hingegen mit einer irreduziblen Darstellung von G, so wird man ebenfalls auf (11) geführt, man kann also jede irreduzible Darstellung von G in dieser Weise schreiben. Also erhält man durch obige Prozedur alle unitären irreduziblen Darstellungen von G.

2.3 Bestimmung der kleinen Gruppe

1. Fall $m^2 > 0$: Die Bedingung für die Invarianz des Repräsentanten K unter der Transformation (4) lautet:

$$A \begin{pmatrix} \pm m & 0 \\ 0 & \pm m \end{pmatrix} A^\dagger = \begin{pmatrix} \pm m & 0 \\ 0 & \pm m \end{pmatrix}$$

   Da K proportional zur Einheitsmatrix ist, heisst das $AA^\dagger = 1$, also $A \in \mathrm{SU}(2)$. Dies ist die universelle Überlagerungsgruppe der Rotationsgruppe SO(3), also ihr quantentheoretisches Pendant. Die irreduziblen Darstellungen der SU(2) können bekanntlich durch eine Drehimpulsquantenzahl $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$ charakterisiert werden, die im Fall von Elementarteilchen als *Spin* bezeichnet wird. Massive Teilchen können somit durch ihre Masse m und ihren Spin s beschrieben werden.

2. Fall $m^2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2|a|^2 & 2a\bar{c} \\ 2c\bar{a} & 2|c|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Daraus folgt $|a|^2 = 1$ und $c = 0$. Nutzt man noch $1 = \det(A) = ad$, dann hat man schließlich:

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

   Man hat die eindeutige Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & be^{i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

   Ausserdem gilt:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & be^{i2\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen mit $\theta = 0$ sind somit ein Normalteiler der kleinen Gruppe, die kleine Gruppe ist also das semidirekte Produkt $\mathrm{U}(1) \ltimes \mathbb{C}$. Man sieht ebenso, dass die Wirkung von $e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1)$ auf ein $b \in \mathbb{C}$ durch $be^{i2\theta}$ gegeben ist, also durch einer Drehung um den Winkel 2θ in der komplexen Ebene. Da die kleine Gruppe in diesem Fall wieder ein semidirektes Produkt ist, kann man das obige Verfahren zur Klassifikation ihrer irreduziblen Darstellungen benutzen. Die Orbits von $\mathrm{U}(1)$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ sind die Kreise um den Ursprung sowie der Ursprung selbst ($\mathrm{Char}(\mathbb{C})$ kann analog zu oben mit $\mathbb{C}$ identifiziert werden). Im Fall der Kreise bekommen die Basisvektoren der irreduziblen Darstellungen einen kontinuierlichen Index, der die Position auf dem Kreis festlegt (analog zum Impuls p oben). So ein kontinuierlicher Freiheitsgrad wird bei den Elementarteilchen nicht beobachtet, es sind also nur die zum Ursprung gehörenden Darstellungen relevant. Die Isotropiegruppe des Ursprungs ist die ganze $\mathrm{U}(1)$, deren irreduzible Darstellungen durch $\theta \mapsto e^{i\sigma 2\theta}$ mit $\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{3}{2}, ...$ gegeben sind. Masselose Teilchen ($m = 0$) werden also durch ihre *Helizität* σ charakterisiert. Lässt man eine Matrix A mit $b = 0$ auf die zu einem Vierervektor gehörende Matrix P gemäß $APA^\dagger$ wirken, so wird der Vierervektor um den Winkel 2θ um die 3-Achse gedreht. Da der Impuls k in die 3-Richtung zeigt, kann σ als Drehimpuls in Bewegungsrichtung gedeutet werden.

3. Fall $p = 0$: Dies ist das Vakuum, welches natürlich invariant unter jeder Lorentztransformation bleibt, d.h. $A = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$.
4. Fall $m^2 < 0$:
$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Für eine Matrix A mit $\det(A) = 1$ gilt aber die Identität:
$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Es muss also gelten:
$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^T$$
Dies ist Äquivalent zu $A^\dagger = A^T$, die Matrix A ist also reel und damit $A \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. Alle nichttrivialen Darstellungen von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ sind unendlichdimensional. Die zu $m^2 < 0$ gehörenden hypothetischen Teilchen werden als Tachyonen bezeichnet.

2.4 Darstellungen auf den Schnitten homogener Vektorbündel

Hat man zusätzlich zur Gruppenwirkung von G auf M noch ein Vektorbündel E über M (mit Projektion $\pi\colon E \to M$ und Fasern $E_x = \pi^{-1}(x)$), dann ist E ein *homogenes Vektorbündel*, wenn:

1. G wirkt auf E
2. Die Projektion $\pi\colon E \to M$ ist ein G-Morphismus (äquivariant), also $g\pi(v) = \pi(gv)$ für alle $g \in G$ und $v \in E$ (das heißt nichts anderes als dass $g\colon E_x \to E_{gx}$)
3. Die Abbildung $g\colon E_x \to E_{gx}$ ist linear für alle $g \in G$ und $x \in M$

Man kann nun eine Darstellung ρ von G auf dem Vektorraum der Schnitte $\Gamma(E)$ bekommen, indem man die Wirkung von G auf $\Gamma(E)$ definiert durch ($f \in \Gamma(E)$ und $g \in G$):

$$\rho(g)f(x) = gf(g^{-1}x) \tag{12}$$

Die Homogenität des Vektorbündels ist notwendig für die Linearität und für $f(g^{-1}x) \in E_{g^{-1}x}$, so dass $\rho(g)f(x) \in E_x$ ist und f wieder auf einen Schnitt abgebildet wird.

Die oben hergeleiteten Darstellungen der Poincaré Gruppe können auch als Darstellung auf den Schnitten eines homogenen Vektorbündels verstanden werden. Die Menge M entspricht hier dem gewählten Orbit der Charaktere, die E_p werden durch die $v_{p\sigma}$ für festgehaltenes p aufgespannt. Die durch (11) definierte Gruppenwirkung erfüllt offensichtlich die Bedingungen für ein homogenes Vektorbündel, und die Darstellungen auf dessen Schnitten entsprechen den Darstellungen aus Abschnitt 2.2.

3 Darstellungen semidirekter Produkte

3.1 Induzierte Darstellungen

In Abschnitt 2.2 wurde durch eine Darstellung der Isotropiegruppe, also einer Untergruppe, eine Darstellung der gesamten Gruppe induziert, vgl. (11). Dies soll nun verallgemeinert werden, indem ein homogenes Vektorbündel konstruiert wird.

Sei H eine Untergruppe von G, sowie s eine Darstellung von H auf einem Vektorraum V. Man kann nun $M = G/H = \{gH | g \in G\}$ bilden, also die Menge aller Nebenklassen gH von H. Jetzt definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $G \times V$:

$$(gh, v) \sim (g, s(h)v)$$

Hier ist $g \in G$, $h \in H$ und $v \in V$. Die Äquivalenzklasse von (g, v) wird mit $[(g, v)]$ bezeichnet und die Menge der Äquivalenzklassen mit $E \equiv (G \times V)/\sim$.[2] Die Abbildung $\pi\colon (g, v) \mapsto gH$ ist dann konstant auf den Äquvalenzklassen und stellt somit eine Abbildung von E nach M dar. Man kann die Elemente $x = gH$ von M vorerst durch ein Gruppenelement g repräsentieren. Dann muss die Faser von x gegeben sein durch $E_x = \pi^{-1}(x) = \{[(g, v)] \mid v \in$

[2] G ist somit das *Prinzipalbündel* über $M = G/H$ (mit *Strukturgruppe* H) und das so konstruierte E ist das zur Darstellung s *assoziierte* Vektorbündel.

$V\}$. Man hat dann eine von g abhängige Identifizierung von V und E_x durch die Abbildung:

$$\Phi_g : V \to E_x, \quad \Phi_g(v) = [(g, v)]$$

Eine andere Wahl von g ist gh, für das gilt:

$$\Phi_{gh}(v) = [(gh, v)] = [(g, s(h)v)] = \Phi_g(s(h)v)$$

Oder kurz:

$$\Phi_{gh} = \Phi_g \circ s(h) \tag{13}$$

Definiert man nun die $e_i \in E_x$ durch $e_i = \Phi_g(v_i)$, dann kann man eine Addition auf E_x definieren:

$$e_1 + e_2 = \Phi_g(v_1 + v_2)$$

Diese Addition ist auf Grund von (13) und der Linearität von s unabhängig von g, E_x ist also tatsächlich ein Vektorraum und E damit ein Vektorbündel über M.

Man lässt nun ein $a \in G$ auf dieses Vektorbündel E wirken durch:

$$a[(g, v)] = [(ag, v)]$$

Dies stellt eine lineare Abbildung von $E_x \to E_{ax}$ dar, man hat es also mit einem homogenen Vektorbündel zu tun. Die entsprechende Darstellung von G auf den Schnitten $\Gamma(E)$ heisst von s *induziert*.

Sei als Beispiel nun H die Isoptropiegruppe eines Punktes x wie in Abschnitt 2.2. Dann hat man eine natürliche Bijektion zwischen dem Orbit Gx und der Menge der Nebenklassen von H: Jedes Element von gH bildet x unter der Gruppenwirkung auf *denselben* Punkt des Orbits von x ab, umgekehrt kann jeder Punkt des Orbits als gx geschrieben werden, was für jeden Punkt eine andere Nebenklasse gH liefert. Die Menge M entspricht also einem Orbit aus dem Beispiel in Abschnitt 2.2.

Zur expliziten Konstruktion der induzierten Darstellung muss man eine Basis auf $\Gamma(E)$ wählen. Zuerst wählt man $h_p \in G$ so, dass zu jeder Nebenklasse h_pH bijektiv ein Index p zugeordnet ist. Die Vektoren v_σ sollen eine Basis von V bilden. Eine Basis der Faser $\pi^{-1}(h_pH)$ ist dann gegeben durch $e_{p\sigma} = [(h_p, v_\sigma)]$. Als Basis $v_{p\sigma}$ von $\Gamma(E)$ bietet sich dann folgende an:

$$v_{p\sigma}(h_{p'}H) = \delta_{pp'}\, e_{p\sigma} \tag{14}$$

Nun kann die induzierte Darstellung ρ nach (12) berechnet werden:

$$\rho(g)v_{p\sigma}(h_{p'}H) = gv_{p\sigma}(g^{-1}h_{p'}H)$$

Dies ist nach (14) nur dann ungleich null, wenn $g^{-1}h_{p'}H = h_pH$. Sei also im folgenden $h_{p'}^{-1}gh_p \in H$ und $s_{\bar\sigma\sigma}$ die Matrix zu s in der Basis v_σ:

$$\begin{aligned}
\rho(g)v_{p\sigma}(h_{p'}H) &= ge_{p\sigma} \\
&= [(gh_p, v_\sigma)] \\
&= [(h_{p'}, s(h_{p'}^{-1}gh_p)v_\sigma)] \\
&= \Phi_{h_{p'}}(s_{\bar\sigma\sigma}(h_{p'}^{-1}gh_p)v_{\bar\sigma}) \\
&= s_{\bar\sigma\sigma}(h_{p'}^{-1}gh_p)\Phi_{h_{p'}}(v_{\bar\sigma}) \\
&= s_{\bar\sigma\sigma}(h_{p'}^{-1}gh_p)e_{p'\bar\sigma} \\
&= s_{\bar\sigma\sigma}(h_{p'}^{-1}gh_p)v_{p'\bar\sigma}(h_{p'}H)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (11) erhält man hieraus, wenn man $h_{p'}^{-1}gh_p \in H$ beachtet, denn an (10) sieht man, dass dann $p' = \tau(g)p$ gelten muss.

3.2 Allgemeines Vorgehen

Das Vorgehen aus Abschnitt 2.2 kann man sofort auf beleibige semidirekte Produkte $G = H \ltimes N$ mit abelschem Normalteiler N verallgemeinern:

1. Zerlegen von $\mathrm{Char}(N)$ nach Orbits unter G. Wähle einen Orbit und einen Repräsentanten χ_k dieses Orbits.
2. Sei $G_k = H_{\chi_k} \ltimes N$. Wähle irreduzible Darstellung s von H_{χ_k} auf einem Vektorraum V. Weil man jedes Element aus G_k als hn mit $h \in H_{\chi_k}$ und $n \in N$ schreiben kann, erhält man eine irreduzible Darstellung ρ_k von G_k durch $\rho_k(hn)v = \chi_k(n)s(h)v$ für $v \in V$.
3. Konstruktion der von ρ_k induzierten Darstellung ρ von G nach Abschnitt 3.1.

Nach Mackey gilt dann [3]:

- Sei G separabel und lokal kompakt. Dann folgt aus der Irreduzibilität von s die Irreduzibilität von ρ.
- Ist G ein reguläres semidirektes Produkt, dann können *alle* irreduziblen Darstellungen durch obige Prozedur erhalten werden.

Ein semidirektes Produkt heisst *regulär*, wenn es kein quasi-invariantes Maß auf $\mathrm{Char}(N)$ gibt, das streng ergodisch unter der Wirkung von H ist.

Literatur

[1] S. Sternberg, *Group theory and physics.* Cambridge, UK: Univ. Pr. (1994) 429 p.

[2] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations.* Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p.

[3] C. J. Isham, "Topological and global aspects of quantum theory,". Lectures given at the 1983 Les Houches Summer School on Relativity, Groups and Topology, Les Houches, France, Jun 27 - Aug 4, 1983.