

# Protokoll zum Versuch Gaslaser

Tina Clauß, Jan Steinhoff  
Betreuer: Dr. Dietel

26. Juli 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Optische Resonatoren . . . . .	5
2.2	Gaußsche Optik . . . . .	6
2.3	Wechselwirkung von Licht mit Atomen . . . . .	7
2.3.1	Linienbreite . . . . .	8
2.3.2	Das aktive Medium . . . . .	8
2.4	Der Laser . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau und Messprinzip</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
4.1	Resonatortaille . . . . .	11
4.2	Bündelbreite ausserhalb des Resonators . . . . .	12
4.3	Transversalmoden . . . . .	13
4.4	Das optische Heterodyn . . . . .	15
<b>A</b>	<b>Messprotokoll</b>	<b>18</b>

# 1 Aufgabenstellung

1. Erarbeiten sie sich ein Justierverfahren zur Justierung der Resonatorspiegel (Wie hoch muss das Reflexionsvermögen der Spiegel sein? In welchem Abstand  $L$  können die Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R$  positioniert werden?)
2. (a) Berechnen Sie die Größe der Resonatortaille  $w_0$  für verschiedene Längen  $0 \leq L \leq 2R$  eines symmetrischen Resonators (graphische Darstellung). Diskutieren sie das Ergebnis für den konfokalen und konzentrischen Resonator hinsichtlich Strahldivergenz und Resonatorstabilität. Welche Rolle spielt eine Aperturblende in beiden Resonatortypen? (unbegrenzte Spiegelausdehnung vorausgesetzt)
  - (b) Skizzieren Sie die Feldverteilung (Phasenfronten) im konfokalen Resonator. Geben Sie den Nahfeldbereich an (Bündelradius  $w(z) = \sqrt{2}w_0$ ).
3. Bestimmen Sie experimentell den Tailenradius  $w_0$  für drei verschiedene Resonatorlängen  $L = R = 0.5\text{m}$ ;  $L = 0.75\text{m}$ ;  $L = 0.9\text{m}$ . Machen Sie davon Gebrauch, dass der Abstand der Knotenlinien der  $TEM_{02}$ -Mode dem Bündelradius  $w$  entspricht. Zusatzaufgabe: Nachweis
4. Bestimmen Sie den Bündelradius  $w(z)$  außerhalb des Resonators durch Ausmessen der Knotenlinien der  $TEM_{02}$ -Mode,  $z \geq 3\text{m}$ . Berechnen Sie diesen Bündelradius  $w(z)$  unter Benutzung des ermittelten Tailenradius  $w_0$  (nach Aufgabe 2a,  $L = 0.75\text{m}$ ) für freie Ausbreitung des Gauß-Bündels.
5. Berechnen Sie den Bündelradius  $w(z)$  unter Berücksichtigung der Ausbreitung des Gauß-Bündels durch Auskoppelspiegel (plankonkav, Brechungsindex  $n = 1.5$ ) mit Hilfe der Bündeltransformation. Benutzen Sie den Formalismus der ABCD-Strahlmatrizen. (Aufstellen der Strahlmatrix für das Gesamtsystem)
6. Wählen Sie eine geeignete Resonatorkonfiguration zur Selektion höherer Transversalmoden und fotografieren Sie diese und die  $TEM_{00}$ -Mode mit einer Digitalkamera bei konstantem Abbildungsmaßstab. Wie unterscheiden sich die Beugungsverluste höherer Transversalmoden gegenüber denen der  $TEM_{00}$ -Mode? Welchen Einfluss hat der Krümmungsradius der Spiegel? Wie kann man die  $TEM_{00}$ -Mode sicher erhalten?
7. Untersuchen Sie das Spektrum der Axialmoden des Multi-Mode-Lasers MML mit Hilfe des optischen Heterodyn (Überlagerung mit gewobelter Frequenz eines Single-Mode-Lasers SML, oszillographische Darstellung). Beachten Sie bei der Überlagerung, welche Voraussetzungen für die Interferenz zweier Wellen erfüllt sein müssen. Welchen Frequenzabstand können Sie mit dieser Anordnung noch auflösen? Vergleichen Sie dieses Auflösungsvermögen mit dem eines Prismenspektrometers. Skalierung der x-Achse in Frequenzeinheiten durch piezoelektrische Längenabstimmung des SML um eine Ordnung,  $L_{SML} = 0.17\text{m}$ . Angaben zur Oszillationsbandbreite des SML. Welche Längenänderung  $\Delta L/L$  des MML können Sie noch messen?
8. Beobachten Sie das Schwebungssignal zwischen den Frequenzen zweier freilaufender Laser in realtime (SML ohne Wobbelung, Aufnahme des Signals mit Speicheroszillograph). Geben Sie an, in welchen Größenordnungen sich die Kurzzeitfluktuationen der Laserfrequenz (Hz/s) eines freilaufenden Lasers typischerweise bewegen können.

9. Wodurch kommt die Absenkung im Intensitätsprofil des Single-Mode-Lasers zustande (Lamb-dip)? Schätzen Sie aus der Halbwertsbreite des Lamb-dip  $\Delta\nu_{LD}$  die Größenordnung der homogenen Linienbreite  $\Delta\nu_{HL}$  ab ( $2\Delta\nu_{HL} \sim \Delta\nu_{LD}$ ). Vergleichen Sie mit der Dopplerbreite  $\Delta\nu$  der Linie (Temperatur der Gasentladung  $\sim 300\text{K}$ ). Skizzieren Sie das Verstärkungsprofil des He-Ne-Lasers mit Angabe der Dopplerbreite und der Oszillationsbandbreite des SML (aus Aufg. 7).

## 2 Theoretische Grundlagen

Ein Laser besteht aus einem lichtverstärkenden (aktiven) Medium, das in einen optischen Resonator gebracht wird. Die Lichtverstärkung im aktiven Medium erfolgt durch stimulierte Emission.

### 2.1 Optische Resonatoren

Ein optischer Resonator besteht aus zwei Spiegeln, zwischen denen sich stehende Wellen ausbilden können. Die Länge des Resonators  $L$  muss daher ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein. Dies führt dazu, dass nur bestimmte Frequenzen stehende Wellen ausbilden können, der Abstand dieser Frequenzen beträgt:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \quad (1)$$

Im Versuch wurden sphärische Spiegel verwendet. Bei Berücksichtigung der Beugung erhält man dann für das elektrische Feld im Resonator näherungsweise [2]:

$$E_{lm} = A_{lm} \frac{w_0}{w(z)} H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{i \left( kz - \omega t + (l+m+1)\varphi(z) + \frac{k}{2} \frac{x^2+y^2}{R(z)} \right)} \quad (2)$$

Dabei ist:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (3)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\tan \varphi = -\frac{z}{z_0} \quad (5)$$

$$z_0 = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2 \quad (6)$$

Die  $H_l(u)$  sind die hermiteschen Polynome ( $H_0 = 1$ ,  $H_1 = 2u$ ,  $H_2 = 4u^2 - 2$ , ...).  $w(z)$  ist die Breite des Gaußschen Bündels<sup>1</sup> und  $R(z)$  der Krümmungsradius der Phasenflächen. Der Parameter  $w_0$  (bzw.  $z_0$ ) muss so gewählt werden, dass  $R(z)$  auf den Spiegeloberflächen gleich dem Radius des jeweiligen Spiegels ist. Diese beiden Bedingungen führen auf [3]:

$$w_0^4 = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2} \quad (7)$$

<sup>1</sup>Die Amplitude des elektrischen Feldes ist in der x-y-Ebene Gauß-förmig

Hierbei sind  $R_1$  und  $R_2$  die Spiegelradien. Für den Fall  $R_1 = R_2 = R$  ergibt sich speziell<sup>2</sup>:

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{L}{4}(2R - L) \quad (8)$$

Das Feld im Resonator ist dann im Allgemeinen eine Überlagerung dieser transversalen  $TEM_{lm}$ -Moden, die wiederum aus unterschiedlichen longitudinalen Moden zusammengesetzt sein können, deren Frequenzabstand näherungsweise durch (1) gegeben ist.

Welche Moden im Laser wirklich auftreten, hängt z.B. vom Modenvolumen ab, das bestimmt, wie gut die verstärkende Wirkung des aktiven Mediums von der Mode ausgenutzt wird. Außerdem kann eine hohe Divergenz der Mode zu Beugungsverlusten an den Spiegeln führen. Nach (3) divergiert die Bündelbreite für  $w_0 \rightarrow 0$ , die Strahldivergenz und damit die Beugungsverluste wachsen also mit sinkendem  $w_0$ . Einen Resonator mit  $w_0 \rightarrow 0$  nennt man daher instabil. Nach (8) ist ein Resonator mit gleichen Spiegelradien  $R_1 = R_2$  stabil für  $0 < L < 2R$ .

## 2.2 Gaußsche Optik

In der geometrischen Optik kann man in paraxialer Näherung ein optisches System durch eine Matrix beschreiben, die wiederum das Produkt der Matrizen der einzelnen Teilsysteme (z.B. Linsen, freie Ausbreitung, ...) ist:

$$M = M_n M_{n-1} \dots M_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (9)$$

Die Matrix für die freie Ausbreitung um eine Strecke  $d$  ist beispielsweise

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

und für eine dünne Linse lautet die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die Brennweite  $f$  ist dabei gegeben durch die Linsenmacherformel:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (12)$$

Hier sind  $r_1$  und  $r_2$  die Krümmungsradien der Linsenoberfläche und  $n$  ist die Brechzahl des Glases.

Breibt man Wellenoptik mit Gaußschen Bündeln, so kann man mit diesen Matrizen auch die Transformation der Bündel beim Durchgang durch das optische System beschreiben. Dazu definiert man den komplexen Parameter  $q$ :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (13)$$

---

<sup>2</sup>Für den konfokalen Resonator ( $L = R$ ) gilt speziell  $w_0^2 = R/k$  bzw.  $z_0 = R/2$ , d.h. der Nahfeldbereich füllt gerade den Resonator aus

Kennt man also  $q$  an einer bestimmten Position, dann ist die Breite des Gaußschen Bündels und der Radius der Phasenflächen an diesem Ort bekannt. Befindet sich die Taille bei  $z = 0$ , dann gilt speziell [2]:

$$q(z) = z - iz_0 \quad (14)$$

Dabei ist  $z_0$  wie in (6) definiert. Die Transformation des Bündels durch das optische System ist nun gegeben durch [2]:

$$q_n = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D} \quad (15)$$

### 2.3 Wechselwirkung von Licht mit Atomen

Die gebundenen Zustände eines Elektrons können nach der Quantenmechanik nur diskrete Energiewerte annehmen (Energieniveaus). Geht nun ein Elektron von einem Energieniveau in ein anderes über, dann wird die fehlende bzw. überschüssige Energie in Form eines Photons aufgenommen bzw. abgegeben. Die Frequenz des Photons  $\nu$  ergibt sich aus der Energiebilanz:

$$h\nu = E_2 - E_1 \quad (16)$$

Hier sind  $E_1$  und  $E_2$  die Energien der beiden Niveaus.

Es gibt drei verschiedene Prozesse, die bei der Wechselwirkung von Atomen mit Photonen stattfinden: Absorption, spontane Emission und induzierte Emission. Bei der Absorption wird ein Photon vom Elektron aufgenommen und das Elektron geht auf ein höheres Energieniveau über. Die Zahl der absorbierten Photonen ist proportional zur Anzahl der Atome  $N_1$  im Grundzustand und zur Photonendichte bzw. zur spektralen Energiedichte  $\rho(\nu)$ :

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}N_1\rho(\nu) \quad (17)$$

Bei der spontanen Emission geht das Atom wieder in den Grundzustand zurück. Die Zahl der emittierten Lichtquanten ist proportional zur Anzahl der Atome  $N_2$  im angeregten Zustand, nicht aber zur spektralen Energiedichte:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 \quad (18)$$

Das abgegebene Photon hat bei der spontanen Emission keine Beziehung zum äußeren Lichtfeld, weder in der Phase noch in der Ausbreitungsrichtung. Anders ist das bei der induzierten Emission. Hier wird der Übergang vom angeregten Niveau in den Grundzustand durch ein passierendes Photon angeregt. Das emittierte Photon ist mit dem ursprünglichen identisch. Deshalb ist die induzierte Emission zur Lichtverstärkung im Laser geeignet. Die Zahl der emittierten Photonen ist in diesem Fall proportional zur Anzahl der Atome  $N_2$  im angeregten Zustand und zur spektralen Energiedichte  $\rho(\nu)$ :

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}N_2\rho(\nu) \quad (19)$$

Die Konstanten  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  und  $B_{12}$  nennt man Einsteinkoeffizienten. Betrachtet man alle drei Prozesse gleichzeitig, dann erhält man:

$$\frac{dN_2}{dt} = B_{12}N_1\rho(\nu) - B_{21}N_2\rho(\nu) - A_{21}N_2 \quad (20)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt  $\frac{dN_2}{dt} = 0$ , zwischen  $N_1$  und  $N_2$  gilt die Boltzmann-Verteilung und  $\rho(\nu)$  ist durch die Planck'sche Strahlungsformel gegeben. Setzt man dies in (20) ein, dann erhält man folgende Zusammenhänge [3]:

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (21)$$

$$B_{12} = B_{21} \quad (22)$$

An (21) erkennt man, dass bei zunehmender Frequenz  $\nu$  die spontane Emission gegenüber der induzierten Emission überwiegt.

### 2.3.1 Linienbreite

Die endliche Lebensdauer  $\tau$  der angeregten Zustände im Atom führt nach der Unschärfere-lation zu einer Energie- bzw. Frequenzunschärfe  $(\Delta\nu)_{nat}$ :

$$(\Delta\nu)_{nat} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (23)$$

Dies ist die natürliche Linienbreite. Für den 632.8nm Linie des Ne gilt  $\tau = 10^{-8}$ s, die natürliche Linienbreite ist also  $(\Delta\nu)_{nat} = 16$ MHz. Weil diese Linienbreite bei jedem einzelnen Atom vorhanden ist, wird sie homogen genannt. Eine Möglichkeit, die Linienbreite zu vergrößern ist durch Stöße während der Emission eines Photons (Druckverbreiterung). Diese Verbreiterung ist homogen, für die oben genannte Ne-Linie gilt:

$$(\Delta\nu)_{hom} = 16\text{MHz} + 50\text{MHz/mbar} \quad (24)$$

Die Linienverbreiterung ist inhomogen, wenn die einzelnen Atome verschiedene Beiträge zur gesamten Linienbreite leisten. Dies ist bei der Dopplerverbreiterung gegeben. Beim He-Ne-Laser überwiegt bereits bei  $T = 300$ K die Dopplerverbreiterung gegenüber der Druckverbreiterung. Man erhält so für die Gesamte Linienbreite:

$$\Delta\nu \approx (\Delta\nu)_{inh} = 1500\text{MHz} \quad (25)$$

### 2.3.2 Das aktive Medium

Bei Vernachlässigung der spontanen Emission ( $A_{21} = 0$ ) erhält man für die Photonenzahl-dichte  $q$  unter Benutzung von (20) und (22):

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = \rho(\nu)B_{21}(N_2 - N_1) \quad (26)$$

Damit eine Verstärkung des Lichtes auftritt, muss also gelten:

$$N_2 > N_1 \quad (27)$$

Dies ist die *erste Laserbedingung*. Es muss also eine Besetzungsinversion vorliegen. Die Besetzungsinversion kann nicht thermisch hergestellt werden, weil für die Boltzmann-Verteilung immer  $N_1 > N_2$  gilt. Eine Besetzungsinversion kann aber durch selektive Anregung (Pumpen) erreicht werden. In einem Zweiniveausystem ist auch dann die Erzeugung einer Besetzungsinversion nicht möglich, weil nach (22) die Wahrscheinlichkeit für induzierte Emission

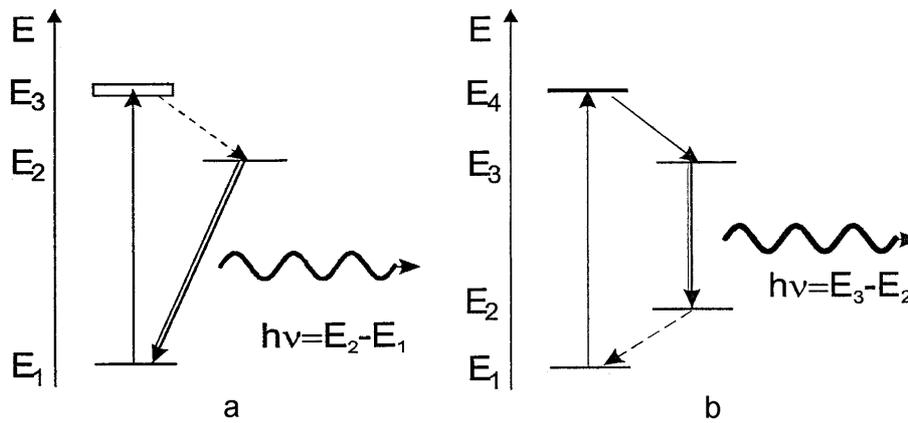


Abbildung 1: a) 3-Niveau-System, b) 4-Niveau-System [3]

und Absorption gleich sind. Ein 3-Niveau- und ein 4-Niveau-System sind auf Abbildung 1 dargestellt. Beim 3-Niveau-System besteht das Problem, dass das untere Laserniveau der Grundzustand ist, so dass man eine hohe Pumprate benötigt, um eine Besetzungsinversion zu erzeugen. Beim 4-Niveau-System wird ein zusätzliches kaum besetztes Niveau als unteres Laserniveau benutzt, so dass schon bei relativ kleinen Pumpraten eine Besetzungsinversion erzeugt wird. Beim He-Ne-Laser liegt ein modifiziertes 4-Niveau-System vor, das obere Laserniveau wird durch Stöße zweiter Art mit metastabil angeregten He-Atomen gepumpt. Die He-Atome werden wiederum durch Elektronenstöße angeregt.

## 2.4 Der Laser

Ein Laser besteht aus einem aktiven Medium in einem optischen Resonator. Setzt man in (26)  $\rho = q \cdot h\nu$  und  $dl = c \cdot dt$ , dann erhält man für die Intensität des Lichtes  $I(l)$  beim Durchgang durch das aktive Medium:

$$I = I_0 \cdot e^{g \cdot l} \quad (28)$$

$$g = \sigma_{21}(N_2 - N_1) \quad (29)$$

$$\sigma_{21} = B_{21} \frac{h\nu}{c} \quad (30)$$

Dabei ist  $\sigma_{21}$  der Wirkungsquerschnitt der Emission und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im aktiven Medium. Diese Gleichung gilt nur für  $N_2 - N_1 = \text{const}$  (Kleinsignalverstärkung). Weil sich das aktive Medium in einem Resonator befindet, kann es zur Selbsterregung kommen, wenn die Verluste pro Umlauf kleiner als die Verstärkung pro Umlauf ist. Die Verstärkung für einen doppelten Umlauf ist:

$$I(2L) = I(0) \cdot e^{g \cdot 2L} \quad (31)$$

Ähnlich dazu schreibt man die Verluste für einen doppelten Umlauf als:

$$I(0) = I(2L) \cdot e^{-\kappa} \quad (32)$$

Dabei ist  $\kappa$  der Verlustkoeffizient. Selbsterregung ist also unter folgender Bedingung möglich:

$$\sigma_{21}(N_2 - N_1) \cdot 2L \geq \kappa \quad (33)$$

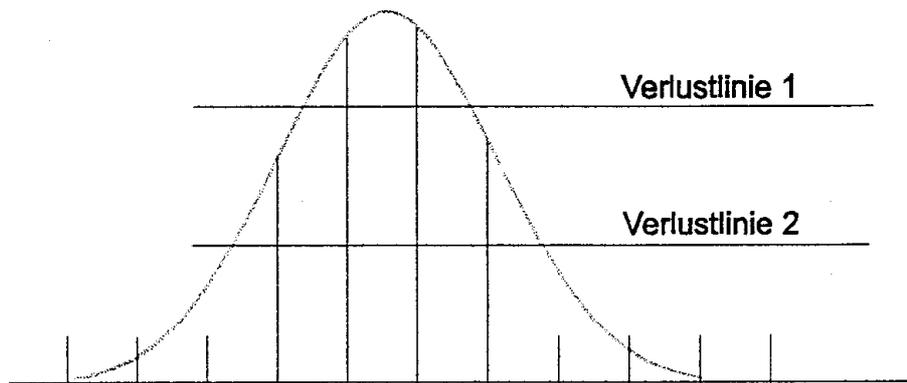


Abbildung 2: Verstärkungsprofil mit Longitudinalmoden. Die Verlustlinie legt fest, welche Moden oszillieren können [3]

Dies ist die *zweite Laserbedingung* (Schwellwertbedingung). Finden im wesentlichen nur Verluste an den Spiegeln statt, dann gilt:

$$\kappa = -\ln(r_1 r_2) \quad (34)$$

Hier sind  $r_1$  und  $r_2$  die Reflexionsvermögen der Spiegel.

Auf Abbildung 2 ist das Verstärkungsprofil über der Frequenz dargestellt. Weiterhin ist die Lage der longitudinalen Moden nach (1) zu sehen. Die Lage der Verlustlinie ist durch (33) gegeben. Alle Moden, deren Verstärkung unter dieser Verlustlinie liegt, können nicht oszillieren. Die Breite dieser Moden wird durch den Resonator festgelegt. Wie beim Fabry-Perot-Resonator fällt die Frequenzbreite der Moden bei Erhöhung der Lebensdauer der Photonen im Resonator. Die Lebensdauer kann z.B. durch hochreflektierende Spiegel und eine große Resonatorlänge vergrößert werden. Beim Laser wird die Lebensdauer außerdem durch das aktive Medium entscheidend vergrößert.

Die Intensität des Laser wächst natürlich nicht unaufhörlich an, weil mit zunehmender Intensität die Besetzungsinversion  $N_2 - N_1$  abgebaut wird. Dies geschieht so lange, bis in (33) das Gleichheitszeichen gültig ist. Es stellt sich also ein Gleichgewichtszustand ein, in dem die Verluste und die Verstärkung pro Umlauf gleich groß sind. Bei homogen verbreitertem Verstärkungsprofil wird die Besetzungsinversion bei allen Atomen gleichmäßig abgebaut. Dies führt zu einer starken Modenkonkurrenz, d.h. nur wenige gut ausgebildete Moden können oszillieren. Der Fall eines inhomogen verbreiterten Profils ist auf Abbildung 3 zu sehen. Hier wird die Besetzungsinversion nicht gleichmäßig abgebaut, es kommt zum sogenannten *hole-burning*. Auf Abbildung 3 ist nur eine Longitudinalmode zur Oszillation fähig (Single-Mode-Laser, SML). Dies kann man erreichen, indem man die Resonatorlänge  $L$  in (1) so wählt, dass nur eine Mode über der Verlustlinie liegt. Trägt man die Besetzungsinversion über der Geschwindigkeit der Atome in axialer Richtung auf, so wird die Besetzungsinversion bei zwei verschiedenen Geschwindigkeiten abgebaut, weil keine Richtung des Resonators ausgezeichnet ist und somit nur der Betrag der Geschwindigkeit eine Rolle spielt. Ist der Laser jedoch so abgestimmt, dass gerade die Atome mit verschwindender Axialgeschwindigkeit zur Verstärkung genutzt werden, dann können nur noch Atome in einem (statt in zwei) bestimmten Geschwindigkeitsbereich das Licht verstärken, was zu einer Abnahme der Intensität führt (Lamb-dip). Die Halbwertsbreite des Lamb-dip  $(\Delta\nu)_{LD}$  hängt daher mit der homogenen Linienbreite folgendermaßen zusammen:

$$2(\Delta\nu)_{hom} \approx (\Delta\nu)_{LD} \quad (35)$$

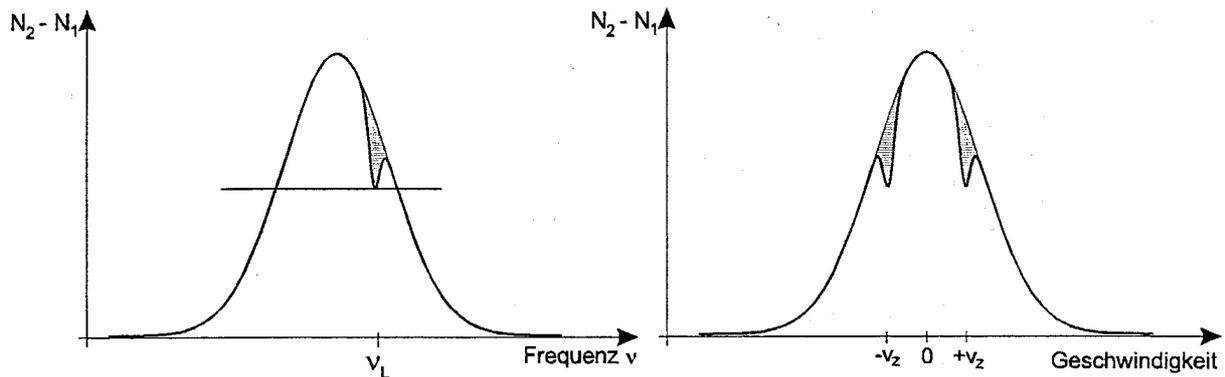


Abbildung 3: Besetzungsinversion bei inhomogenem verbreitertem Verstärkungsprofil [3]

### 3 Versuchsaufbau und Messprinzip

Bringt man passende Blenden in den Resonator, die auf den Knotenlinien der Mode bzw. dort, wo die Mode ohnehin schwach ist, absorbieren, dann wird diese Mode durch die Blenden kaum beeinflusst. Alle anderen Moden werden aber abgeschwächt und können nicht mehr oszillieren. Man kann so einen Draht dazu benutzen, die Lage der Knotenlinien im Resonator sehr genau zu vermessen, denn die Mode wird nur dann oszillieren, wenn der Draht genau auf der Knotenlinie liegt. Liegt er ein wenig daneben, dann oszilliert der Laser normalerweise gar nicht, weil er keine passende Mode besitzt und schon geringe Verluste die Oszillation zerstören. Insbesondere kann man durch Ausmessen des Abstandes der Knotenlinien auf die Bündelbreite  $w(z)$  im Resonator schließen. Das hermitesche Polynom  $H_2(u) = 4u^2 - 2$  besitzt Nullstellen bei  $u = \pm 1/\sqrt{2}$ , der Abstand der Nullstellen ist also  $\sqrt{2}$ . Nach (2) ist aber  $u = \sqrt{2}y/w(z)$ , so dass der Abstand der Knotenlinien der  $TEM_{02}$ -Mode genau gleich der Bündelbreite  $w(z)$  ist. Daher wird die Bündelbreite im Resonator mit Hilfe der Knotenlinien der  $TEM_{02}$ -Mode gemessen.

Beim optischen Heterodyn wird der Laserstrahl des Multi-Mode-Lasers MML mit dem eines Single-Mode-Lasers SML überlagert und mit Hilfe eines SEV auf einem Oszi dargestellt. Man kann so Interferenzerscheinungen zwischen zwei unabhängigen Laserstrahlen beobachten. Der SML kann mit Hilfe von Piezokristallen in der Länge verändert werden, wodurch seine Frequenz durchstimmbar wird. Stimmt seine Frequenz fast mit der einer Mode des MML überein, dann kommt es zu einer Schwebungen, die aber wegen Kurzzeitfluktuationen der Laserfrequenz immer nur kurzzeitig sichtbar sind.

## 4 Auswertung

### 4.1 Resonatortaille

Im Versuch wurde ein He-Ne-Laser mit Spiegelradien  $R_1 = R_2 = 0.5\text{m}$  verwendet. Die Abhängigkeit der Resonatortaille  $w_0$  von der Resonatorlänge  $L$  nach (8) ist auf Abbildung 4 zu sehen. Mit dem in Abschnitt 3 beschriebenen Verfahren wurde die Bündelbreite an einer bestimmten Position im Resonator bestimmt. Nun kann mit (3) und der Bedingung, dass der

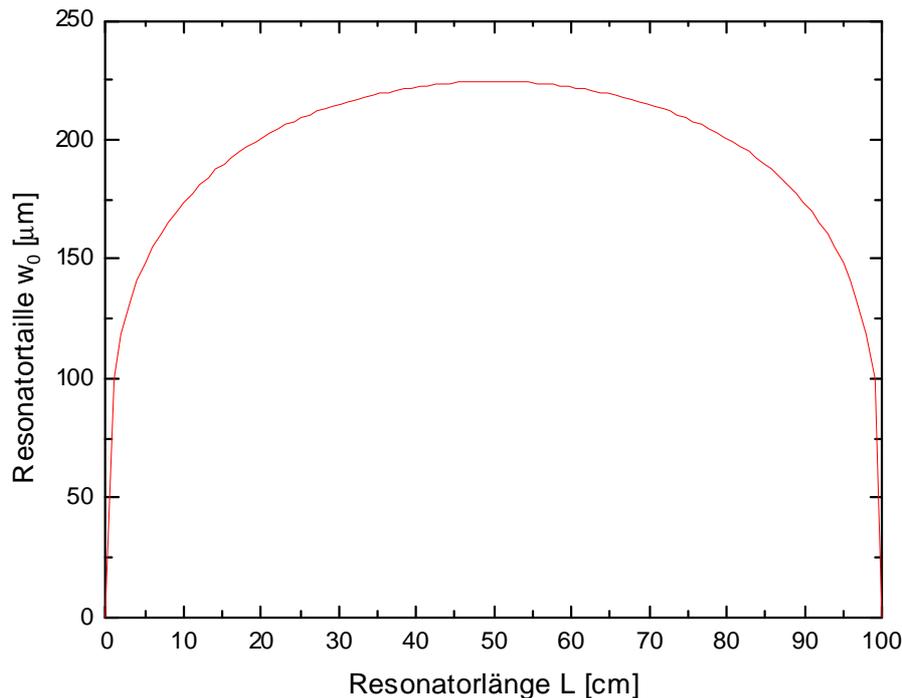


Abbildung 4: Resonatortaille  $w_0$  in Anhängigkeit von der Resonatorlänge  $L$  für  $R = 0.5\text{m}$  und  $\lambda = 632.8\text{nm}$  nach (8)

Krümmungsradius der Phasenflächen auf der Spiegeloberfläche gleich dem Spiegelradius sein muss, die Resonatortaille bestimmen und mit der Theorie vergleichen. Dies ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

Messwert Nr.	Resonatorlänge $L$ [cm]	Gemessene Taille $w_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Taille nach (8) $w_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Abweichung von der Theorie
1	$90 \pm 0,5$	$174,5 \pm 9,3$	173,8	0,42 %
2	$50 \pm 0,5$	$110,8 \pm 9,4$	224,4	51 %
3	$75 \pm 0,5$	$198,4 \pm 9,7$	208,8	5,0 %
4	$51 \pm 0,5$	$145 \pm 11$	224	36 %
5	$52,7 \pm 0,5$	$257 \pm 11$	224	14,5 %
6	$52,7 \pm 0,5$	$250 \pm 11$	224	11,2 %

Die Messwerte 2 und 4 weichen stark von der Theorie ab, weil hier die Moden beim Verschieben des Drahtes stetig ineinander übergingen. Am schwierigsten war die Messung bzw. Justierung im Bereich um  $L = 50\text{cm}$ , was sich auch in der Übereinstimmung mit der Theorie niederschlägt.

## 4.2 Bündelbreite ausserhalb des Resonators

Zur Messung der Bündelbreite ausserhalb des Resonators wurde wieder mit Hilfe von Blenden die  $TEM_{02}$ -Mode eingestellt. Dann wurde ein weißer Faden durch die Mode gefahren und so der Abstand der Knotenlinien bestimmt, der nach Abschnitt 3 gleich der Bündelbreite ist. Zum Vergleich mit der Theorie wird einerseits die freie Ausbreitung des Bündels nach (3) berechnet und andererseits die Auswirkung des Auskoppelspiegels (plankonkav,  $n = 1.5$ ) mit

Hilfe der Bündeltransformation nach Abschnitt 2.2 berücksichtigt, was zu einem genaueren Ergebnis führen sollte.

Für austretendes Licht wirkt der Auskoppelspiegel wie eine plankonkave Linse. Für die Brennweite  $f$  erhält man nach (12) mit  $r_1 = -0.5$ ,  $r_2 = \infty$  und  $n = 1.5$  dann:

$$f = -1\text{m} \quad (36)$$

Die Transformation des Bündels besteht also aus einer freien Ausbreitung um die Strecke  $L/2$ , einer Transformation durch eine Linse der Brennweite  $f = -1\text{m}$  und schließlich einer freien Ausbreitung ausserhalb des Resonators um eine Strecke  $d$ . Die Matrix für diese Transformation ist also nach Abschnitt 2.2 (in SI-Einheiten):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + d & (\frac{L}{2} + 1)d + \frac{L}{2} \\ 1 & \frac{L}{2} + 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Wir führten die Messung mit  $L = 0.9\text{m}$  und  $d = 4.78\text{m}$  aus, die Matrix lautet dann:

$$M = \begin{pmatrix} 5.78 & 7.381\text{m} \\ 1\text{m}^{-1} & 1.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (39)$$

Weil bei  $z = 0$  gerade die Taille des Bündels ist, gilt nach (14), (6) und (8):

$$q_0 = -iz_0 = -i\frac{\pi}{\lambda}w_0^2 = -\frac{i}{2}\sqrt{L(2R - L)} = -i \cdot 0.15\text{m} \quad (40)$$

Aus (15) erhält man dann:

$$\frac{1}{q_3} = \frac{Cq_0 + D}{Aq_0 + B} = (0.1961 + i \cdot 0.002716)\text{m} \quad (41)$$

Aus (13) kann nun die Bündelbreite  $w$  bestimmt werden. Das Ergebnis ist:

Gemessene Bündelbreite [mm]	Bündelbreite nach (3) [mm]	Berücksichtigung des Spiegels [mm]
$8,48 \pm 0,10$	6,06	8,61

Man sieht, dass die Berücksichtigung des Spiegels notwendig ist, um einen vernünftigen Wert für die Bündelbreite zu berechnen. Die verbleibende Abweichung zwischen Theorie- und Experiment könnte dadurch entstanden sein, dass in den Theoriewert noch die Messungenauigkeit von  $L$  und  $d$  mit eingeht.

### 4.3 Transversalmoden

Je mehr Knotenlinien eine Transversalmode besitzt, um so breiter wird sie und damit steigen auch die Beugungsverluste<sup>3</sup>. Um höhere Transversalmoden zu erhalten, muss man dem

<sup>3</sup>Will man nur die  $TEM_{00}$ -Mode, dann kann man also eine kreisförmige Blende in den Resonator einbauen und die Öffnung so lange verkleinern, bis nur noch die  $TEM_{00}$ -Mode oszillieren kann

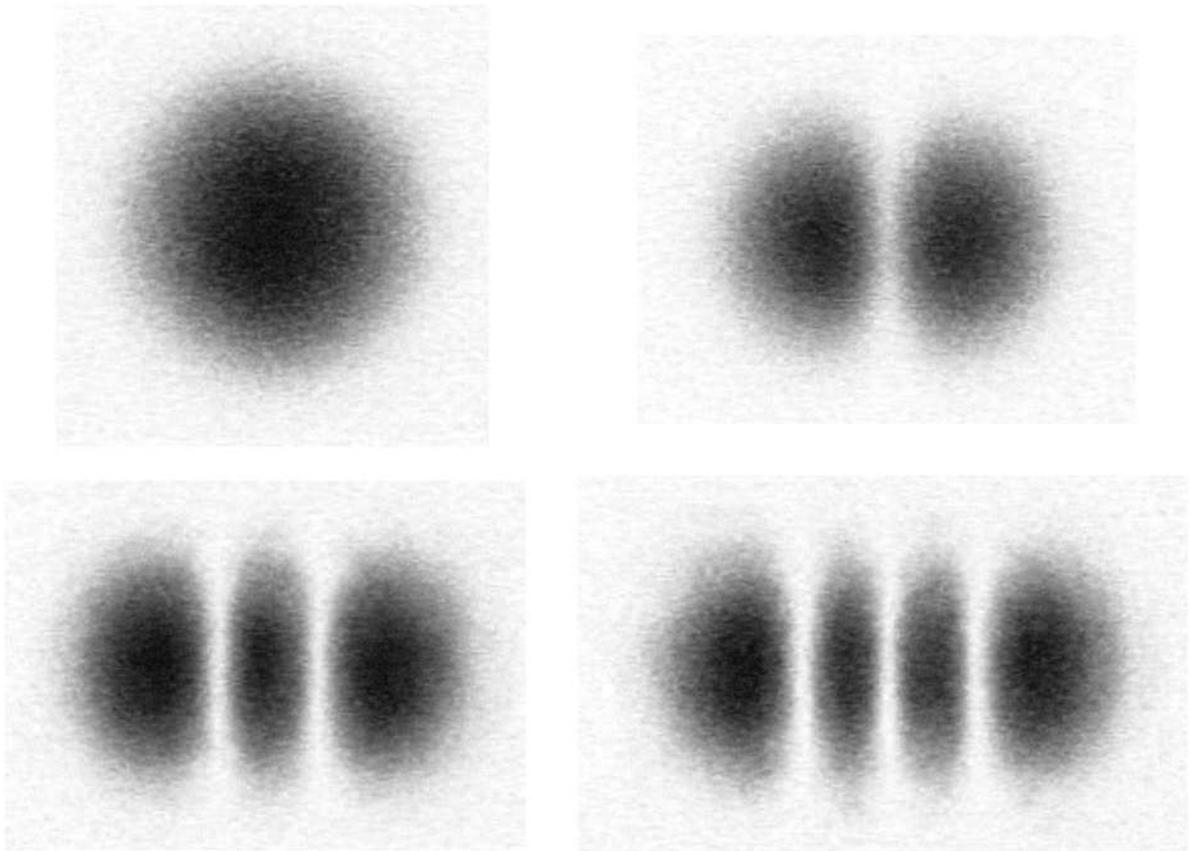


Abbildung 5: Verschiedene transversale Moden im Vergleich

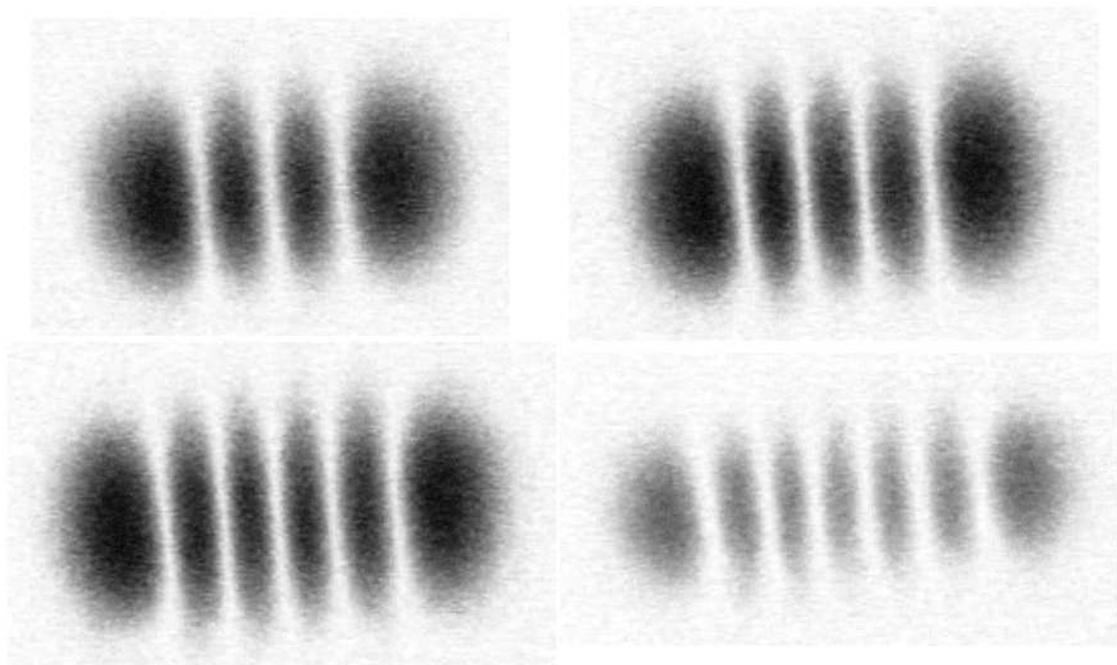


Abbildung 6: Höhere transversale Moden bei kleinerem Resonator

entgegenwirken und den Bündelradius verkleinern. Ersetzt man in (3) und (8)  $R$  durch  $\alpha R$ ,  $L$  durch  $\alpha L$  und  $z$  durch  $\alpha z$ , dann sieht man, dass  $w(z) \propto \alpha$  ist, d.h. durch gleichzeitige Verkleinerung von  $R$  und  $L$  wird das Bündel im Resonator schmaler. Bleiben die beugenden Öffnungen im Resonator gleich groß, dann können jetzt höhere Transversalmoden entstehen. Es ist weiterhin sinnvoll, einen konfokalen Resonator ( $L = R$ ) zu verwenden, weil dann  $w_0$  am größten und die Divergenz damit am kleinsten ist (vgl. auch Abb. 8). Es wurden daher für diesen Teilversuch Spiegel mit  $R = 0.4\text{m}$  verwendet. Abbildung 5<sup>4</sup> zeigt die Moden bei relativ großem Spiegelabstand. Durch Verkleinerung der Resonatorlänge werden höhere Moden möglich, wie auf Abbildung 6 zu sehen ist. Es fällt auf, dass die Moden eine bestimmte Größe nicht überschreiten können, d.h. die höchsten sichtbaren Moden bei verschiedenen Resonatorlängen sind annähernd gleich groß.

#### 4.4 Das optische Heterodyn

Die Bedingungen für eine stationäre Interferenz zweier unabhängiger Laser-Strahlen ist, dass beide *exakt* die gleiche Frequenz haben, zwischen den Laser-Strahlen muss ein fester Phasenunterschied vorhanden sein (zeitliche Kohärenz) und im beobachteten Bereich müssen die Strahlen räumlich Kohärent sein. Um einen ausreichenden Kontrast zu erhalten, müssen außerdem die Polarisationsrichtung und die Amplitude übereinstimmen. Weil mit einem SEV beobachtet werden soll, müssen die Strahlen möglichst parallel sein und die Krümmungsradien der Phasenoberflächen müssen möglichst gleich sein, denn sonst besteht die Gefahr, dass das SEV über mehrere Beugungsordnungen mittelt. Dies wird auch durch die Verwendung einer kleinen Blende vor dem SEV sichergestellt, und die räumliche Kohärenz ist in dem verkleinerten Gebiet besser gegeben. Das größte Problem ist die Frequenz, denn der SML ist zwar durchstimmbar, allerdings sind die Kurzzeitfluktuationen so groß, dass man im Praktikum keine stationäre Interferenz erzeugen kann. Dies wird umgangen, indem man ein Sinus-Signal an den Piezokristall des SML anlegt, wodurch die Frequenz periodisch geändert wird. Dadurch stimmt die Frequenz des SML und einer Mode des MML immer mal wieder kurzzeitig überein und es kommt zu Schwebungen. Das Beobachtete Ergebnis ist auf Abbildung 7 zu sehen. Das sinus-förmige Signal ist die Spannung am Piezokristall, das andere Signal wird durch den SEV erzeugt. Deutlich zu sehen ist der Lamb-dip des SML, der so auch ohne den MML zu sehen wäre. Die durch die Moden des MML hervorgerufenen Schwebungen sind als dünne vertikale Striche erkennbar.

Da der Frequenzabstand der Moden des MML durch (1) berechnet werden kann, kann die x-Achse des Oszi auf eine Frequenzskala geeicht werden. Dabei muss man beachten, dass man möglichst im linearen Bereich des Sinus-Signals bleibt. Alternativ kann die x-Achse auch mit den Intensitätsminima des SML geeicht werden, allerdings konnten wir den Piezokristall nicht so einstellen, dass im linearen Bereich des Sinus gearbeitet werden konnte. Die Eichung mit Hilfe der MML-Moden ergab:

$$1\text{ms auf der x-Achse} \hat{=} 132\text{MHz} \quad (42)$$

Wenn man davon ausgeht, dass auf dem Oszi noch 0.2ms aufgelöst werden können, dann beträgt das Auflösungsvermögen des optischen Heterodyn ungefähr  $18 \cdot 10^6$ , ist also vier Größenordnungen über dem eines Prismenspektrometers! Weil zwei MML-Moden sich genau

---

<sup>4</sup>Zur Bildbearbeitung: Zuerst wurde der rote Farbkanal dazu verwendet, ein Graubild zu erstellen und dieses wurde dann invertiert. Die Größenverhältnisse aller Moden auf beiden Abbildungen wurden aber beibehalten.

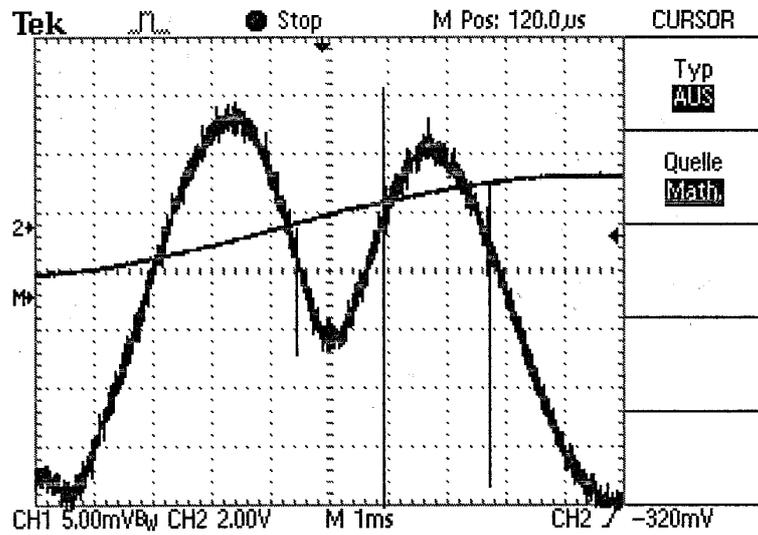


Abbildung 7: Spannung am Piezokristall des SML (sinus-förmig) und Lamb-dip mit Spektrum der Axialmoden des MML

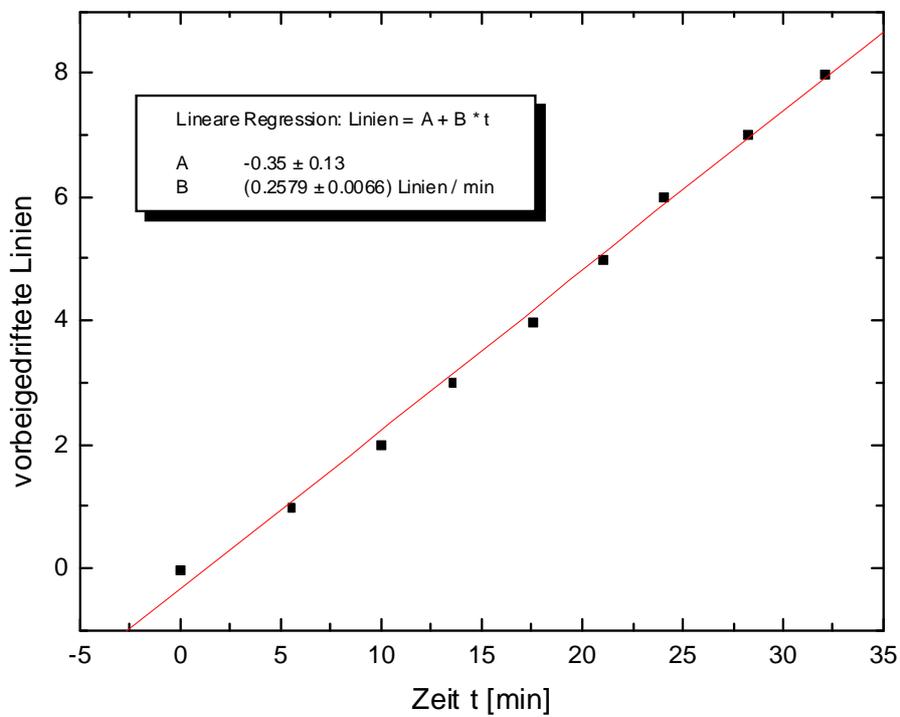


Abbildung 8: Langzeitdrift

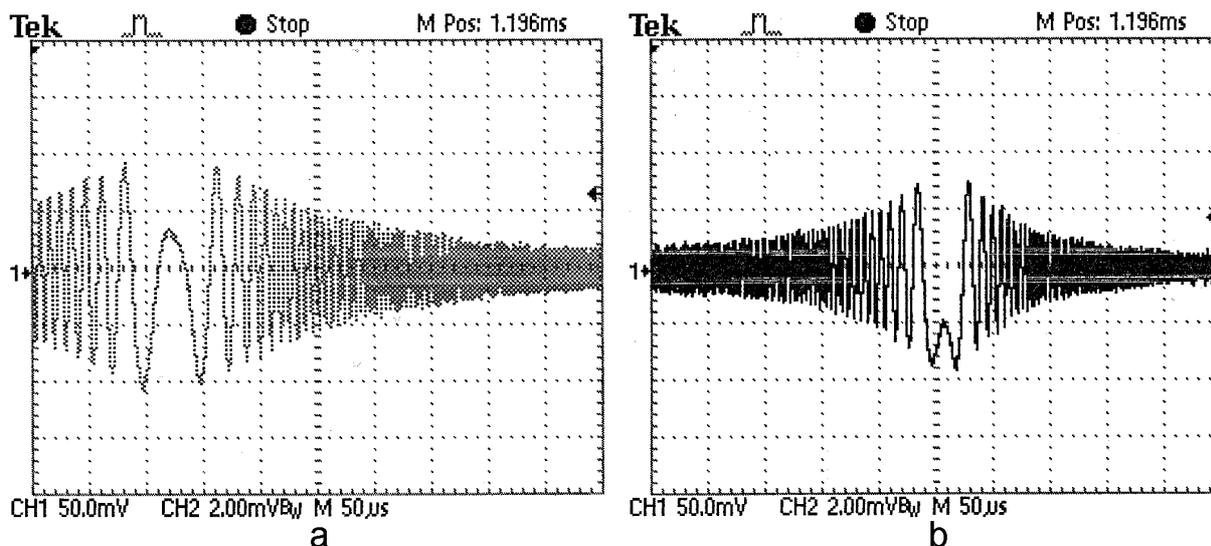


Abbildung 9: Schwebungen hervorgerufen durch Kurzzeitfluktuationen

um eine halbe Wellenlänge unterscheiden, kann man auch Längenänderungen des MML relativ zum SML sehr genau messen. Man erhält so:

$$1\text{ms auf der x-Achse} \hat{=} 205\text{nm Längenänderung} \quad (43)$$

Kann man auf dem Oszi noch 0.2ms auflösen, dann kann man so Längenänderungen von 41nm noch registrieren.

Für den Lamb-dip wurde eine Breite von 1.52ms bestimmt. Dies entspricht nach (42) einer Breite von:

$$(\Delta\nu)_{LD} = 200\text{MHz} \quad (44)$$

Nach (35) entspricht das wiederum einer homogenen Linienbreite des SML von:

$$(\Delta\nu)_{hom} = 100\text{MHz} \quad (45)$$

Nach (25) ist die homogene Linienbreite also nur ein fünfzehntel (ca. 6 %) so groß wie die inhomogene Linienbreite (Dopplerbreite) bei  $T = 300\text{K}$ . Das Verstärkungsprofil ist ähnlich zu Abbildung 7, die Verlustlinie liegt aber relativ hoch, so dass nur der obere Teil zu sehen ist. Die Oszillationsbandbreite ist ungefähr gleich der inhomogenen Linienbreite.

Die Abbildung 8 zeigt den Langzeitdrift der MML-Moden relativ zum SML. Die y-Achse ist in Einheiten von MML-Modenabständen beschriftet. Eine Einheit entspricht also einer Änderung der Resonatorlänge von einer halben Wellenlänge (316.4nm). Der Langzeitdrift ist in guter Näherung linear<sup>5</sup>.

Typische Schwebungen in Großaufnahme sind auf Abbildung 9 zu sehen (ohne Wobbelung des SML). Diese Schwebungen entstehen kurzzeitig durch Kurzzeitfluktuationen der Laserfrequenz. Entsprechend ändert sich die Frequenz der Schwebung ständig und aus dieser Änderung kann man wiederum die Größe der Kurzzeitfluktuationen abschätzen. Die Änderung der Schwebungsfrequenz entspricht in etwa den Änderungen in den Laserfrequenzen, so dass man mit Hilfe von Abbildung 9 zu Spitzenwerten der Kurzzeitfluktuationen von 2 GHz/s kommt.

<sup>5</sup>Leider haben wir die Anfangsphase des Langzeitdrift verpasst, so dass wir hierüber keine Aussagen machen können

## Literatur

- [1] W. Brunner, W. Radloff, K. Junge; Quantenelektronik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977
- [2] F. Lederer, Skript Theoretische Optik
- [3] Praktikumsanleitung

## A Messprotokoll