

# Protokoll zum Versuch Mikrowellen

Tina Clauß, Jan Steinhoff  
Betreuer: Dr. Morak

17. Oktober 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern . . . . .	4
2.2	Wellenausbreitung im rechteckigen Hohlleiter . . . . .	5
2.3	Abgeschlossene Hohlleiter . . . . .	6
2.4	Hohlraumresonatoren . . . . .	6
2.5	Dielektrische Störungen im Hohlraumresonator . . . . .	8
2.5.1	Reelle dielektrische Störung . . . . .	8
2.5.2	Imaginäre dielektrische Störung . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau und Messprinzip</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>10</b>
4.1	Messung der Hohlleiterwellenlänge . . . . .	10
4.2	Ausmessen des Abschlusswiderstandes . . . . .	12
4.3	Messung der unbelasteten Güte . . . . .	12
4.4	Messung am verlustarmen Dielektrikum . . . . .	13
4.4.1	veränderliche Resonatorlänge . . . . .	13
4.4.2	veränderliche Resonanzwellenlänge . . . . .	14
4.4.3	Zusatzmessung . . . . .	15
4.4.4	Theoretischer Wert für $\varepsilon_{eff}$ . . . . .	16
4.4.5	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	17
4.5	Messung am verlustbehafteten Dielektrikum . . . . .	17
<b>A</b>	<b>Messprotokoll</b>	<b>18</b>

# 1 Aufgabenstellung

1. Messung der Hohlleiterwellenlänge
2. Ausmessen eines Abschlusswiderstandes
3. Messung der Leergüte eines Resonators
4. Messungen an einem verlustarmen Dielektrikum
5. Messungen an einem verlustbehafteten Dielektrikum

# 2 Theoretische Grundlagen

Elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge von ca. 1 mm bis 30 cm werden als Mikrowellen bezeichnet. Wegen dieser geringen Wellenlänge können Mikrowellen nicht mittels Drahtleitungen geführt werden (zu hohe Abstrahlverluste). In diesem Versuch werden deshalb Hohlleiter verwendet. Diese erlauben allerdings nur die Ausbreitung bestimmter Moden.

## 2.1 Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern

Ausgangspunkt für die Beschreibung elektromagnetischer Wellen sind die Maxwell-Gleichungen. Das Innere des Hohlleiters soll ein homogenes und isotropes Medium sein, sowie keine Ladungen enthalten ( $\rho = 0$ ) und nicht leiten ( $\sigma = 0$ ). Die Maxwell-Gleichungen im Hohlleiter lauten dann:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

Die Wände des Hohlleiters hingegen sollen ideale Leiter sein ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), d.h. die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldes müssen dort null sein.

Im folgenden wird angenommen, dass sich der Hohlleiter in  $z$ -Richtung erstreckt und einen konstanten Querschnitt besitzt. Aufgrund dieser Symmetrie kann nun die  $z$ -Abhängigkeit aus den Maxwell-Gleichungen eliminiert werden. Man erwartet sich in  $z$ -Richtung ausbreitende elektromagnetische Wellen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r(x, y) \exp i(\omega t - \beta z) \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_r(x, y) \exp i(\omega t - \beta z) \quad (5)$$

Die Wellengleichung für  $\mathbf{E}_r$  lautet dann (der Index  $r$  wird im folgenden weggelassen):

$$\Delta \mathbf{E} + (k^2 - \beta^2) \mathbf{E} = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \omega^2 \quad (6)$$

Weil die Felder jetzt nur noch von  $x$  und  $y$  abhängen, beziehen sich auch die Differentialoperatoren nur noch auf  $x$  und  $y$ . Ganz allgemein gilt, dass sich im Hohlleiter nur bestimmte Moden ausbreiten können, zu denen jeweils eine bestimmte Wellenzahl  $\beta$  gehört. Das Spektrum von  $\beta$  ist daher diskret. Man teilt die Moden ein in:

- transversale elektrische Moden (TE- oder H-Moden):  $E_z = 0$  und  $H_z \neq 0$
- transversale magnetische Moden (TM- oder E-Moden):  $E_z \neq 0$  und  $H_z = 0$
- transversale elektromagnetische Moden (TEM):  $E_z = 0$  und  $H_z = 0$ . Diese Moden können nur auftreten, wenn im inneren des Leiters noch eine zur z-Achse symmetrische Oberfläche existiert (z.B. Koaxialkabel).

## 2.2 Wellenausbreitung im rechteckigen Hohlleiter

Der Querschnitt des Hohlleiters soll nun rechteckig sein. Die Seitenlängen werden mit  $a$  (in x-Richtung) und  $b$  (in y-Richtung) bezeichnet. Es soll nun das Feld der  $H_{mn}$ -Mode hergeleitet werden, d.h.  $E_z = 0$ . Um die Wellengleichung 6 zu erfüllen, bietet sich ein Ansatz mit sin und cos an:

$$E_x = A \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (7)$$

$$E_y = B \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (8)$$

$$E_z = 0 \quad (9)$$

Der sin in den Formeln wird dabei durch die Randbedingungen gefordert, der cos ergibt sich dann automatisch aus  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Einsetzen dieses Ansatzes in Wellengleichung ergibt dann die Bedingung:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (10)$$

Wenn  $a > b$  ist, besitzt also die  $H_{10}$ -Mode ( $m = 1$  und  $n = 0$ ) die kleinste Wellenlänge. Für die  $H_{10}$ -Mode gilt:

$$E_x = A \cos \frac{\pi}{a} x \quad (11)$$

$$E_y = 0 \quad (12)$$

$$E_z = 0 \quad (13)$$

Aus Gleichung 2 erhält man dann:

$$H_x = -A \frac{\beta}{\omega \mu_r \mu_0} \sin \frac{\pi}{a} x \quad (14)$$

$$H_y = 0 \quad (15)$$

$$H_z = iA \frac{\pi}{\omega \mu_r \mu_0 a} \cos \frac{\pi}{a} x \quad (16)$$

Die Gleichung 10 lautet dann für die  $H_{10}$ -Mode:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_H} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (17)$$

$\lambda_H$  ist die Wellenlänge im Hohlleiter. Weil  $\beta$  reel sein muss, gibt es minimale Frequenz, die Grenzfrequenz  $\omega_g$ :

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \frac{\pi}{a} \quad (18)$$

Der Hohlleiter verhält sich also wie ein Hochpass. Die zur Grenzfrequenz gehörende Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  ist:

$$\lambda_g = 2a \quad (19)$$

Die Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H$  lässt sich dann schreiben als:

$$\lambda_H = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \quad (20)$$

Befindet sich Luft im Hohlleiter, dann ist  $\lambda_0$  annähernd gleich der Vakuumwellenlänge.

### 2.3 Abgeschlossene Hohlleiter

Am Ende elektrischer Leitungen kommt es i. a. zu Reflexionen bzw. Absorptionen. Der komplexe Reflexionskoeffizient  $\tilde{r}$  des Leitungsendes ist definiert durch:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{U}_{refl}}{\tilde{U}_{hin}} \quad (21)$$

Dabei ist  $\tilde{U}_{hin}$  die komplexe Amplitude der einlaufenden Welle und  $\tilde{U}_{refl}$  die komplexe Amplitude der reflektierten Welle. Ist der Wellenwiderstand der Leitung  $\tilde{Z}_l$  und ihr Abschlusswiderstand  $\tilde{R}_A$ , dann ergibt sich nach der Leitungstheorie ein Reflexionskoeffizient von:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{R}_A - \tilde{Z}_l}{\tilde{R}_A + \tilde{Z}_l} \quad (22)$$

Im Fall der Anpassung ( $\tilde{R}_A = \tilde{Z}_l$ ) ist der Reflexionskoeffizient null. Der Reflexionskoeffizient wird am besten mit Hilfe des Stehwellenverhältnisses  $s$  gemessen, das definiert ist durch:

$$s = \frac{|\tilde{U}_{hin}| + |\tilde{U}_{refl}|}{|\tilde{U}_{hin}| - |\tilde{U}_{refl}|} = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1 + |\tilde{r}|}{1 - |\tilde{r}|} \quad (23)$$

Die maximale Spannung  $U_{max}$  und die minimale Spannung  $U_{min}$  entlang des Leiters können nämlich leicht gemessen werden. Das Reflexionsvermögen erhält man dann aus:

$$|\tilde{r}| = \frac{s - 1}{s + 1} \quad (24)$$

Weil die Lösungen der Telegraphengleichung analog zur Gleichung 4 verlaufen<sup>1</sup>, kann man die Ergebnisse der Leitungstheorie auf Hohlleiter übertragen.

### 2.4 Hohlraumresonatoren

Einen Hohlraumresonator erhält man, indem man einen Hohlleiter auf beiden Seiten mit gut leitenden Flächen abschließt. Es bilden sich dann stehende Wellen in  $z$ -Richtung, die Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H$  muss also der Bedingung

$$L = m \frac{\lambda_H}{2} \quad (25)$$

---

<sup>1</sup>statt mit elektrischem und magnetischem Feld wird in der Leitungstheorie mit Spannung und Strom gerechnet

genügen.  $L$  ist dabei die Länge des Resonators in  $z$ -Richtung, die natürliche Zahl  $m$  nummeriert die möglichen stehenden Wellen durch. In diesem Versuch wird mit einer  $H_{10}$ -Mode gearbeitet. Die elektrische Feldstärke in einem  $H_{10m}$ -Resonator ist:

$$E_y = E_{y,max} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{L} z \quad (26)$$

In einem realen Hohlraumresonator wird es immer zu Absorptionen kommen. Wie beim elektrischen Schwingkreis führt dies zu einer nichtverschwindenden Bandbreite  $\Delta f$ . Falls die relative Bandbreite klein gegen eins ist, besteht folgender Zusammenhang mit der Güte  $Q$  des Resonators (analog zum Schwingkreis):

$$Q \approx \frac{f_0}{\Delta f} \quad (27)$$

Dabei ist  $f_0$  die Mittenfrequenz des Resonators. Die Definition der Güte lautet:

$$Q = 2\pi \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{pro Periode verbrauchte Energie}} \quad (28)$$

Die Güte des Resonators lässt sich so nach der Art des Energieverlustes in drei Anteile aufteilen:

- Ohmsche Verluste in den Wänden (Teilgüte  $Q_O$ , auch Leergüte genannt)
- Verluste durch Abstrahlung über die Koppelemente (Teilgüte  $Q_k$ )
- dielektrische oder magnetische Verluste in der Probe (Teilgüte  $Q_p$ )

Die Gesamtgüte der Anordnung erhält man dann nach der Formel:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_O} + \frac{1}{Q_p} + \frac{1}{Q_k} = \frac{1}{Q_{Res}} + \frac{1}{Q_k} \quad (29)$$

Dabei wurden die Leergüte  $Q_O$  und die probenbezogene Güte  $Q_p$  zur Resonatorgüte  $Q_{Res}$  zusammengefasst. Wenn die Kopplung den Resonator möglichst nicht beeinflussen soll, muss  $Q_k \gg Q_{Res}$  sein. Als Maß dafür dient der Koppelfaktor  $\xi$ :

$$\xi = \frac{Q_{Res}}{Q_k} \quad (30)$$

Man unterscheidet die drei Fälle:

- $\xi < 1$ : unterkritische Kopplung
- $\xi = 1$ : kritische Kopplung
- $\xi > 1$ : überkritische Kopplung

## 2.5 Dielektrische Störungen im Hohlraumresonator

### 2.5.1 Reelle dielektrische Störung

Eine rein reelle Störung  $\varepsilon'$  (Probe) in einem  $H_{10m}$ -Resonator führt zu einer effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_{eff}$ :

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \frac{\iiint_{Probe} (\varepsilon' - 1) E_y^2(x, z) dx dy dz}{\iiint_{Resonator} E_y^2(x, z) dx dy dz} \quad (31)$$

Speziell für den im Versuch verwendeten  $H_{102}$ -Resonator erhält man für eine Probe mit kleiner Querschnittsfläche  $A_p$  die sich an der Stelle  $x_p = a/2$  befindet:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \frac{4(\varepsilon' - 1)}{abL} A_p y_p \sin^2 \frac{2\pi}{L} z_p \quad (32)$$

Dabei ist  $y_p$  die Eintauchtiefe der Probe und  $z_p$  ihre Position entlang der  $z$ -Achse. Setzt man die Probe in das Maximum der elektrischen Feldstärke im Resonator ( $z_p = L/4$ ), dann gilt:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \frac{4(\varepsilon' - 1)}{abL} A_p y_p \quad (33)$$

Lässt man die Klystronfrequenz  $f_0$  konstant, dann ändert sich die Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H$  durch einführen der Probe nach den Gleichungen 17 bis 20 zu:

$$\frac{\Delta\lambda_H}{\lambda_H} = \frac{\varepsilon_{eff} - 1}{2} \left( \frac{\lambda_H}{\lambda_0} \right)^2 \quad (34)$$

Damit die Resonanzfrequenz  $f_0$  konstant bleibt, muss man die Resonatorlänge  $L$  anpassen. Nach Gleichung 25 gilt für den  $H_{102}$ -Resonator  $\Delta\lambda_H = \Delta L$ , so dass man für die gemessene effektive Dielektrizitätskonstante erhält:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + 2 \frac{\lambda_H^3}{\lambda_0^2} \Delta L \quad (35)$$

Lässt man hingegen die Resonatorlänge  $L$  bzw.  $\lambda_H$  konstant, dann ändert sich durch einführen der Probe die Resonanzfrequenz  $f_0$  des Resonators. Analog zu oben erhält man dann:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + 2 \frac{\Delta f_0}{f_0} \quad (36)$$

### 2.5.2 Imaginäre dielektrische Störung

Führt man eine imaginäre dielektrische Störung in den Resonator ein, dann kommt es wegen der Absorption in der Probe zu einem zusätzlichen Güteverlust. Es gilt:

$$Q_p = \frac{1}{\varepsilon''} \frac{\iiint_{Resonator} E_y^2(x, z) dx dy dz}{\iiint_{Probe} E_y^2(x, z) dx dy dz} \quad (37)$$

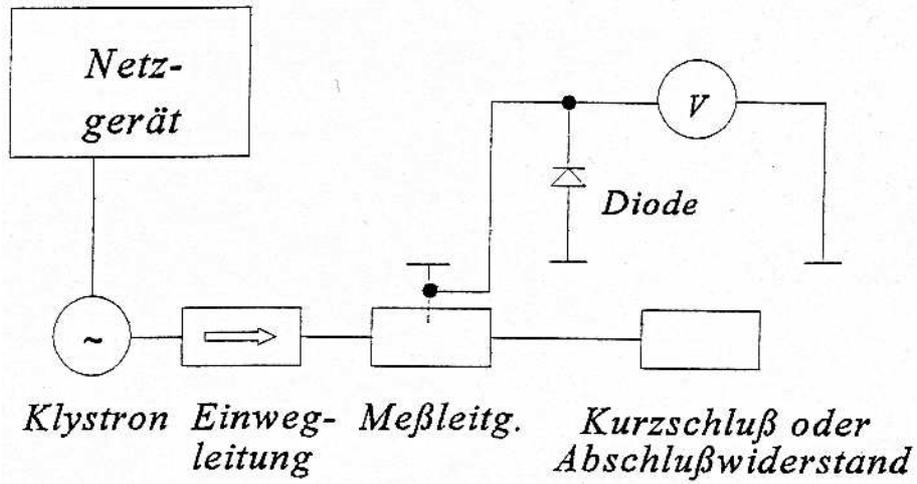


Abbildung 1: Schaltung für die Aufgaben 1 und 2 nach [3]

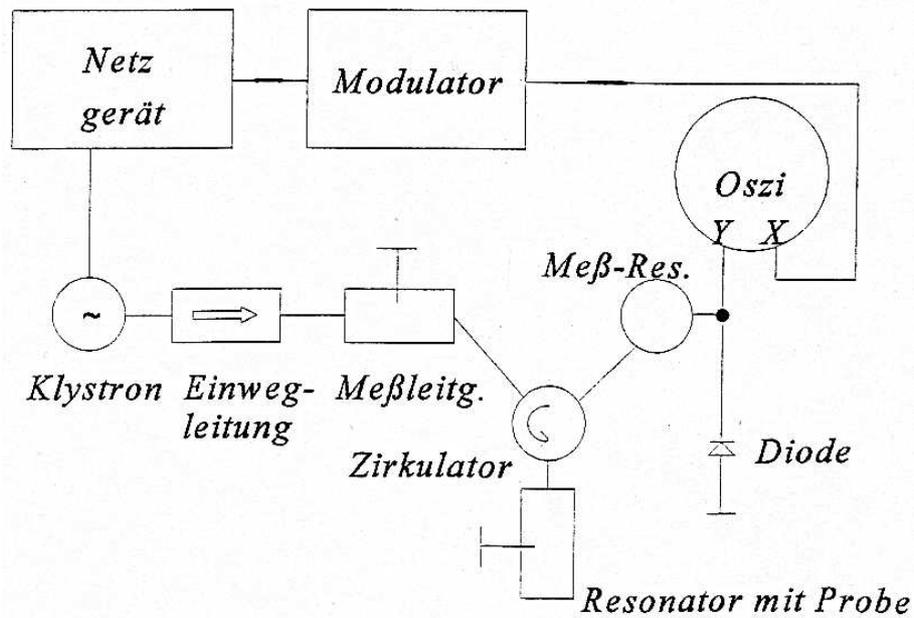


Abbildung 2: Schaltung für die Aufgaben 3 bis 5 nach [3]

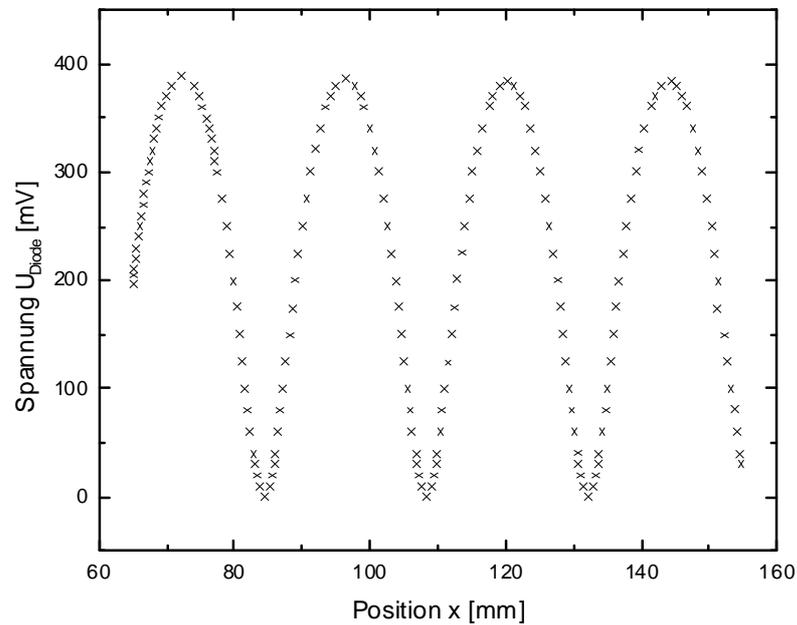


Abbildung 3: Vermessung der Ausgangsspannung über der Diode

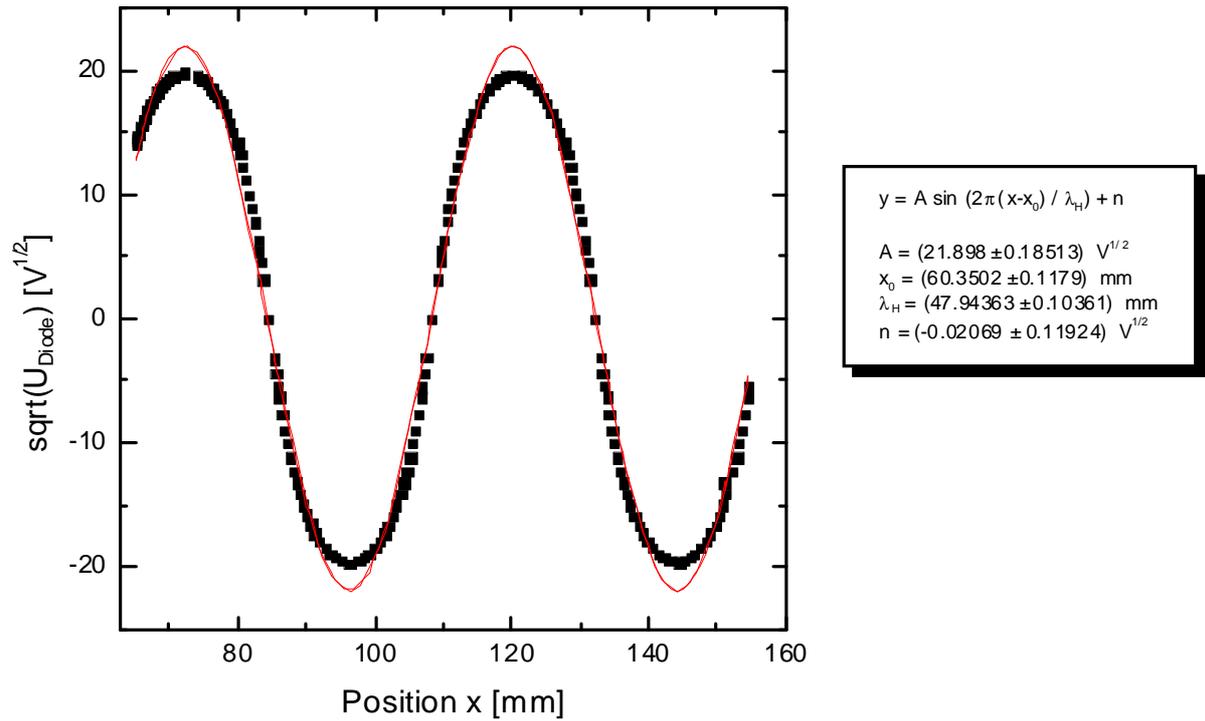
### 3 Versuchsaufbau und Messprinzip

Der Versuchsaufbau ist auf den Abbildungen 1 und 2 dargestellt. Zu beachten ist, dass die Mikrowellendiode näherungsweise eine quadratische Kennlinie besitzt, so dass die Spannung  $U_{Diode}$  proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke im Hohlleiter ist. Bei der Schaltung nach Abbildung 2 wird die Mikrowelle zuerst zum Resonator mit Probe geleitet. Dieser absorbiert stark im Bereich seiner Resonanzwellenlänge und erzeugt somit einen großen Dip auf dem Oszi. Danach wird die Mikrowelle zum Mess-Resonator geführt. Dieser erzeugt nur einen kleinen Dip. Der Messresonator kann auf verschiedene Frequenzen eingestellt werden, so dass die x-Achse des Oszi der Frequenzskala zugeordnet werden kann.

## 4 Auswertung

### 4.1 Messung der Hohlleiterwellenlänge

Die Messvorrichtung wird wie in Abbildung 1 aufgebaut. Die Ausgangsspannung in der Messleitung wird über eine Diode an verschiedenen Punkten gemessen. Es handelt sich hierbei um eine Mikrowellendiode, die eine quadratische Kennlinie besitzt. In Abbildung 3 ist dargestellt, wie sich die an der Diode gemessene Spannung zum Ort innerhalb der Messleitung verhält. Die Spannung innerhalb der Messleitung ist proportional zur Wurzel der über der Diode gemessenen Spannung. Bedenkt man, dass beim Quadrieren, die negativen Halbwellen ebenfalls positiv werden und man dies beim Wurzelziehen wieder kompensiert, ergibt sich folgendes Diagramm (Abbildung 4). Um die Hohlleiterwellenlänge zu bestimmen,

Abbildung 4: Bestimmung der Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H$ 

haben wir die Werte an folgende Funktion angefitet:

$$y = A \sin \frac{2\pi(x-x_0)}{\lambda_H} + n \quad (38)$$

Aus der Fitfunktion ergibt sich für die Hohlleiterwellenlänge:  $\lambda_H = (47,94 \pm 0,11)$  mm. Beim angegebenen Fehler handelt es sich um einen Standardfehler. Daraus lassen sich die Grundwellenlänge  $\lambda_0$  bzw. die Grundfrequenz  $f_0$  des Klystrons bestimmen.

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_H}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_H}{\lambda_g}\right)^2}} \quad (39)$$

Die Grenzwellenlänge ist für den speziellen Hohlleiter bekannt. Sie ergibt sich aus:

$$\lambda_g = 2a \quad (40)$$

In unserem Fall gilt  $\lambda_g = 46$  mm. Für den Standardfehler von  $\lambda_0$  ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma \lambda_0 = \left| \frac{\lambda_g^2}{2\sqrt{\lambda_H + \left(\frac{\lambda_H}{\lambda_g}\right)^2} (\lambda_H + \lambda_g^2)} \right| \sigma \lambda_H \quad (41)$$

Aus der Grundwellenlänge  $\lambda_0$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c = 2,9979 \cdot 10^8$  m/s lässt sich weiterhin die Grundfrequenz  $f_0$  des Klystrons bestimmen. Die Grundwellenlänge ist definiert als die Wellenlänge, die die Mikrowelle im Vakuum hätte, daher gilt:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} \quad (42)$$

Pos. Max. [mm]	Pos. Min. [mm]	$U_{max}^{Diode}$ [mV]	$U_{min}^{Diode}$ [mV]	Stehwellenverh. $s$	Reflex.-koeff. $\tilde{r}$
153,80	141,30	284,30	281,20	1,0055	0,0027
130,20	115,50	283,30	280,60	1,0048	0,0024
105,50	115,50	283,10	280,60	1,0044	0,0022
80,40	94,30	278,10	276,10	1,0036	0,0018
80,40	69,45	278,10	276,00	1,0038	0,0019

Tabelle 1: Ausmessen des Abschlusswiderstands

$$\sigma f_0 = \frac{c}{\lambda_0^2} \sigma \lambda_0 \quad (43)$$

Nach den Formeln 39-43 lassen sich folgenden Werte bestimmen für  $\lambda_0$  und  $f_0$  mit zugehörigen Standardfehlern bestimmen:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (33,1916 \pm 0,0022) \text{ mm} \\ f_0 &= (9,03219 \pm 0,00060) \text{ GHz} \end{aligned}$$

## 4.2 Ausmessen des Abschlusswiderstandes

Nun haben wir den Kurzschlusschieber durch einen Abschlusswiderstand ersetzt. Innerhalb der Messleitung werden nun die Maxima und Minima bestimmt. Aus diesen Werten lässt sich das Stehwellenverhältnis  $s$  und der Reflexionskoeffizient  $\tilde{r}$  wie folgt bestimmen:

$$s = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \sqrt{\frac{U_{min}^{Diode}}{U_{max}^{Diode}}} \quad (44)$$

$$\tilde{r} = \frac{s-1}{s+1} \quad (45)$$

Da die Werte für Spannung innerhalb der Messleitung sehr instabil und auch innerhalb der Messleitung unterschiedlich waren (die Maxima am Ende der Leitung wiesen größere Werte auf als die Maxima am Anfang der Leitung), haben wir unsere Messung möglichst schnell durchgeführt und nur benachbarte Werte miteinander verrechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt.

## 4.3 Messung der unbelasteten Güte

Für die folgenden Messungen haben wir einen Versuchsaufbau wie in Abbildung 2 verwendet. An die Messleitung wird hierbei eine Verzweigung mit einem Messresonator und einem  $H_{102}$ -Resonator angekoppelt. Mit Hilfe eines Modulators kann die gesamte Schwingungsmode des Klystrons auf einem Oszillographen beobachtet werden.

Die Länge des  $H_{102}$ -Resonators kann nun so eingestellt werden, dass seine Resonanzstelle und die Mode des Klystrons die gleiche Frequenz  $f_0$  haben. Die Resonanzstelle des Resonators kann man an einem Dip in der Klystronkurve auf dem Oszillographen erkennen, da er an dieser Stelle Energie entzieht.

Mit Hilfe des geeichten Messresonators, der einen kleinen Dip in der Klystronkurve auf dem Oszillatortbild verursacht, lässt sich der x-Achse auf dem Oszillatortschirm eine Frequenzskala zuordnen.

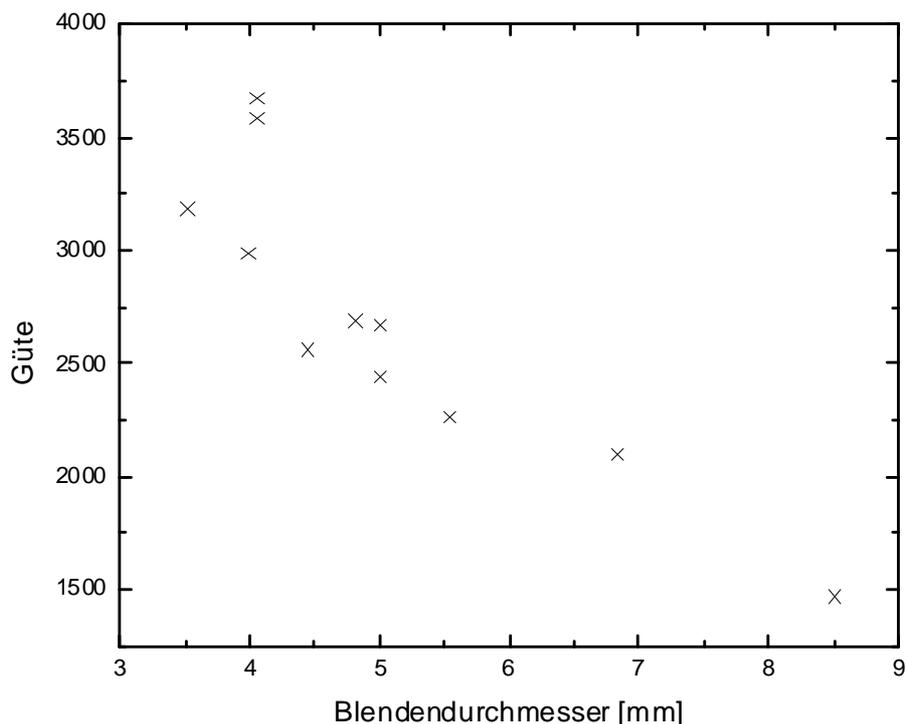


Abbildung 5: Güte des  $H_{102}$ -Resonators in Abhängigkeit vom Blendendurchmesser

Somit kann die in 4.1 aus  $\lambda_H$  bestimmte Grundfrequenz  $f_0$  auch direkt am Oszillographen abgelesen werden. In unserem Fall ergab sich:  $f_0 = 9,108$  GHz. Mit Hilfe von Formel 20 kommt man damit auf eine Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H = 47,12$  mm.

Nacheinander werden nun Lochblenden mit unterschiedlichen Durchmessern an den Eingang des Resonators gesetzt und die Güte bestimmt. Das Problem dabei ist, dass man nur das Resultat der Kurve auf dem Oszillographen sieht, nachdem der Resonator dip von der Klystronmode abgezogen wurde. Man musste also einige Abstriche an die Genauigkeit der Güte machen. Wir bestimmten die Güte, indem wir die Halbwertsbreite  $\Delta f$  des Resonator dips bestimmten und dann nach folgender Formel kalkulierten:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (46)$$

Die jeweiligen Blendendurchmesser bestimmten wir mit einem Abbe-Komparator. Die Ergebnisse dieser Messung sind in Abbildung 5 dargestellt. Man erkennt, dass die Güte zunächst ansteigt, bis sie bei der Blende mit Durchmesser  $d = 4,06$  mm ihr Maximum erreicht und für größere Blenden wieder abfällt. Im folgenden verwendeten wir nun die Blende mit maximaler Güte.

## 4.4 Messung am verlustarmen Dielektrikum

### 4.4.1 veränderliche Resonatorlänge

An einer Stelle innerhalb des Resonators, wo die Feldstärke maximal ist, wird nun ein Rubinkristall eingeführt. Der Rubinkristall ist an einer Vorrichtung befestigt, die sich durch

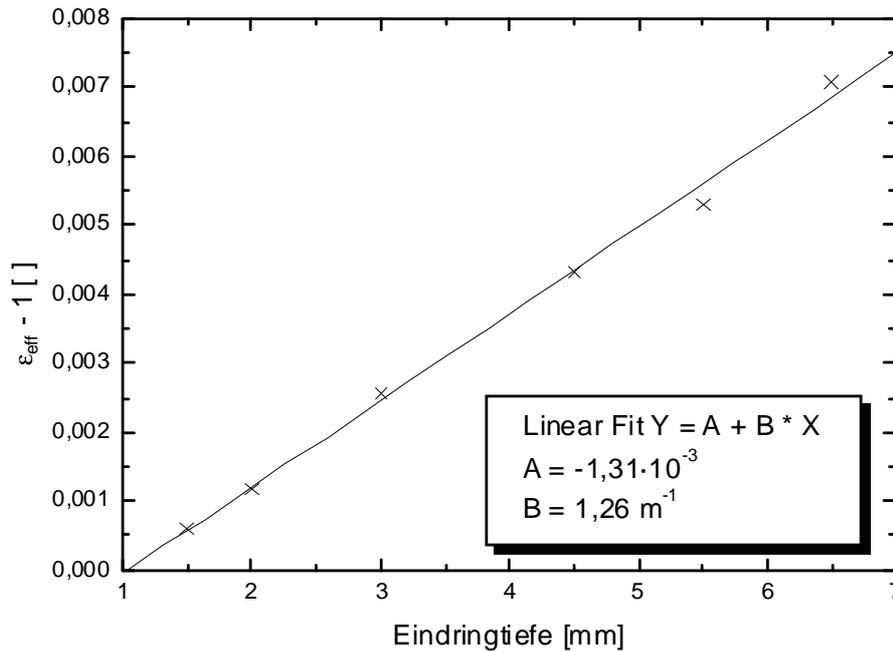


Abbildung 6: Realteil  $\epsilon_{eff}$  in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe des Rubinkristalls bei konstanter Resonatorlänge

Drehung einer M3-Schraube in den Resonator einführen lässt. Eine Umdrehung der M3-Schraube entspricht einer Eindringtiefe von 0,5 mm. Bei jeder zu vermessenden Position des Rubinkristalls wird die Resonatorlänge so nachgeregelt, dass sich der Resonator dip wiederum im Maximum der Klystronmode befindet. Aus der Veränderung der Resonatorlänge  $\Delta\lambda_H$  kann man nun den Real-Teil  $\epsilon_{eff}$  nach folgender Formel bestimmen:

$$\epsilon_{eff} = 1 + 2 \cdot \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_H} \right)^2 \frac{\Delta\lambda_H}{\lambda_H} \quad (47)$$

Die Ergebnisse der Messung sind in Abbildung 6 dargestellt. Anschließend nehmen wir noch eine Korrektur der Messwerte vor, indem wir zunächst  $(\epsilon_{eff} - 1)$  über der Eindringtiefe auftragen und anschließend eine lineare Regression durchführen. Der ursprüngliche Graph kann mit den Regressionswerten nun in y-Richtung so verschoben werden, dass er den Ursprung schneidet. Die Verschiebung des Graphen kommt daher zustande, dass wir den Punkt, an welchem der Rubinkristall in den Resonator eindringt, nicht genau bestimmen konnten. Somit ist auch ein Vergleich der unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung von  $\epsilon_{eff}$  in einem Diagramm (siehe Abbildung 9) möglich.

#### 4.4.2 veränderliche Resonanzwellenlänge

Eine weitere Möglichkeit  $\epsilon_{eff}$  zu bestimmen ist die Resonatorlänge konstant zu halten und die durch das Einführen des Substats veränderte Resonanzfrequenz am Oszillographen abzulesen. Dafür haben wir die x-Skala des Oszillographen mit Hilfe des geeichten Messresonators in eine Frequenzskala übertragen und dann die Verschiebung des Resonator dips abgelesen.

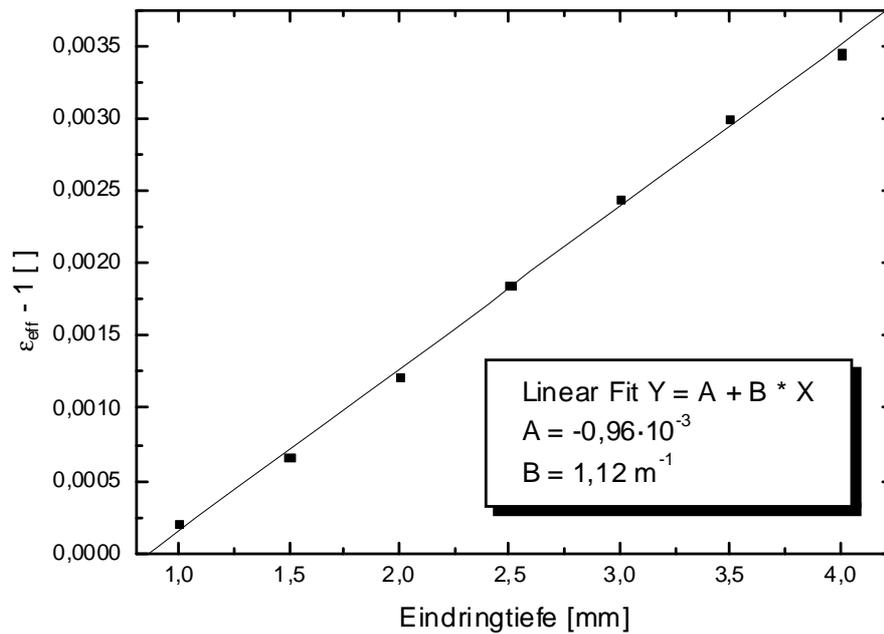


Abbildung 7: Realteil  $\epsilon_{eff}$  in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe des Rubinkristalls bei konstanter Resonatorlänge

Der Real-Teil  $\epsilon_{eff}$  wird nun mit Hilfe der folgenden Formel bestimmt:

$$\epsilon_{eff} = 1 + 2 \cdot \frac{\Delta f_0}{f_0} \quad (48)$$

Die Ergebnisse dieser Messung sind in Abbildung 7 dargestellt. Auch hier musste wie in 4.4.1 beschrieben auch eine anschließende Korrektur der Eindringtiefe vorgenommen werden.

#### 4.4.3 Zusatzmessung

Wir haben bei der Messung der Dielektrizität zuerst die Messaufgabe falsch verstanden und statt der Eintauchtiefe der Probe  $y_p$  die  $z$ -Position der Probe  $z_p$  verändert. Das Ergebnis der Messung ist auf Abbildung 8 zu sehen. Die Theoriekurve ist durch Gleichung 32 gegeben. Die Messwerte liegen auch hier unter der Theoriekurve. Der erste Messwert weicht als einziger nach oben von der Theoriekurve ab, vielleicht eine Art Randeffect (dieser Messwert lag sehr nahe an der Resonatorwand).

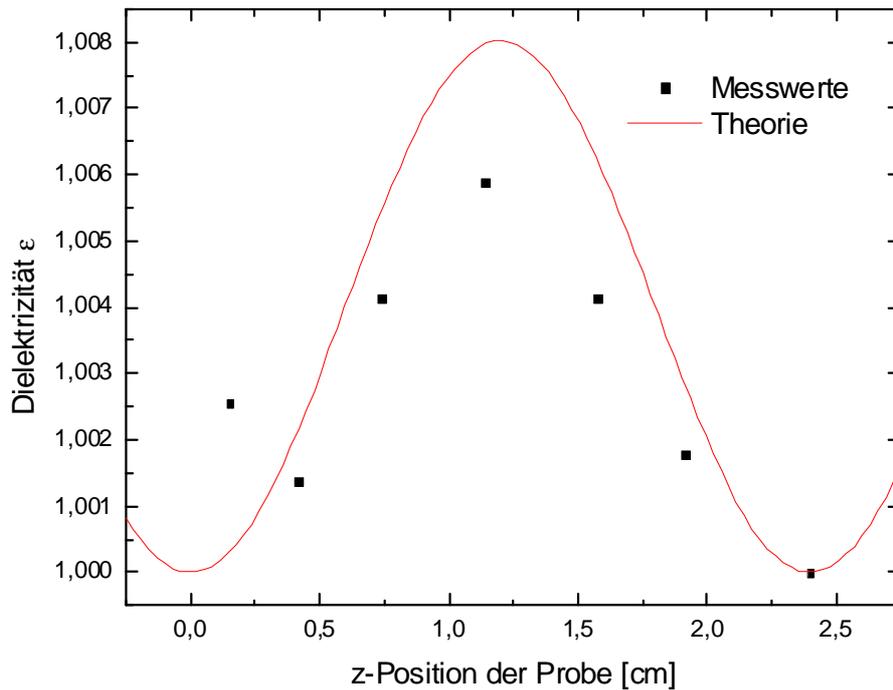


Abbildung 8: Abhängigkeit der Dielektrizität des Resonators von der z-Position  $z_p$  der Probe. Die Eintauchtiefe  $y_p$  wurde konstant auf 4,5 mm gehalten.

#### 4.4.4 Theoretischer Wert für $\varepsilon_{eff}$

Um auf einen theoretischen Wert für  $\varepsilon_{eff}$  zu kommen, muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \frac{\iiint_{Probe} (\varepsilon' - 1) E_y^2(x, y) dx dy dz}{\iiint_{Resonator} E_y^2(x, z) dx dy dz} \quad (49a)$$

$$= 1 + \frac{(\varepsilon' - 1) E_{y_{max}}^2 V_{Probe}}{E_{y_{max}}^2 \iiint_{Resonator} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}z\right) dx dy dz} \quad (49b)$$

$$= 1 + \frac{(\varepsilon' - 1) A_{Probe} y_{Probe}}{\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^b dy \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}z\right) dz} \quad (49c)$$

$$= 1 + \frac{(\varepsilon' - 1) A_{Probe} y_{Probe}}{\frac{baL}{4}} \quad (49d)$$

Folgende Werte sind bekannt:

$$\begin{aligned} a &= 2,3 \text{ cm} & b &= 1,0 \text{ cm} & A_{Probe} &= 0,42 \cdot 1,30 \text{ mm}^2 \\ L &= \lambda_H = 47,94 \text{ mm} & \varepsilon' &\approx 10 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Werte in Formel 49d ergibt sich folgende Theoriekurve:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + 1,78 \text{ m}^{-1} \cdot y_{Probe} \quad (50)$$

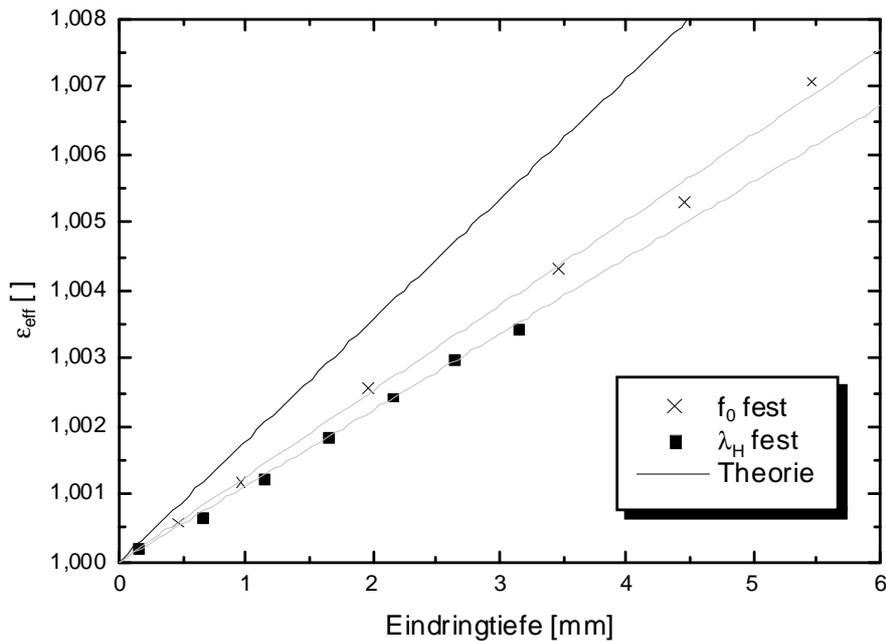


Abbildung 9: Realteil  $\epsilon_{eff}$  in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe des Rubinkristalls, alle drei Kurven im Vergleich

	Resonatorlänge wird variiert ( $f_0$ fest)	Resonatorlänge konstant ( $\lambda_H$ fest)	Theoriekurve
Steigung [1/m]	1,26	1,12	1,78

Tabelle 2: Vergleich der Steigungen aus Abbildung 9

#### 4.4.5 Vergleich der Ergebnisse

In Abbildung 9 sind sowohl die beiden korrigierten Kurven aus 4.4.1 und 4.4.2 als auch die Theoriekurve aus 4.4.4 in einem Diagramm dargestellt. In Tabelle 2 sind nochmal alle drei Steigungen zusammengefasst. Die starke Abweichung der experimentellen Kurven von der theoretischen kann in einem fehlerhaften Wert für  $\epsilon'$  begründet sein, der die Theoriekurve verfälschen könnte. Würde man zum Beispiel  $\epsilon' = 7$  annehmen, so hätte die Theoriekurve eine Steigung von  $1,19\text{m}^{-1}$ .

### 4.5 Messung am verlustbehafteten Dielektrikum

Die folgende Messung wird ähnlich durchgeführt wie in 4.4. Diesmal ist jedoch anstelle des Rubinkristalls, welcher als verlustarmes Dielektrikum diente, eine mit Wasser gefüllte Glaskapillare, die als verlustbehaftetes Dielektrikum dient, an der Schraubvorrichtung, die sich in den Resonator einführen lässt, befestigt. Diesmal bestimmten wir jedoch die Güte in Abhängigkeit von der Eindringtiefe des Substrats. In Abbildung 10 ist der Kehrwert der Güte über der Eindringtiefe dargestellt. Mit folgender Näherungsformel kann man nun den

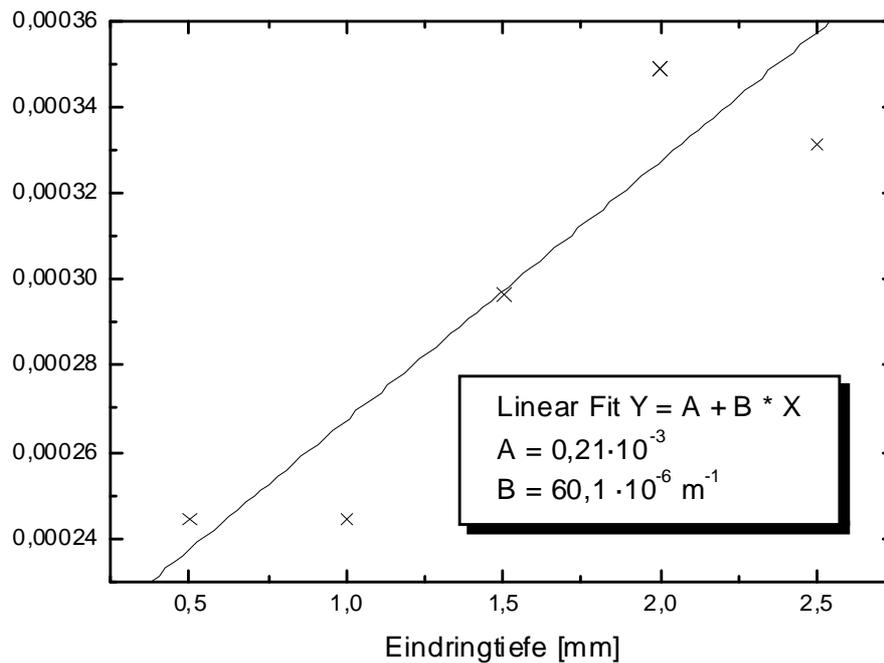


Abbildung 10: Kehrwert der Güte über der Eindringtiefe bei Messung mit verlustbehaftetem Dielektrikum (Kapillare)

Effektivwert der dielektrischen Störung  $\varepsilon''$  abschätzen:

$$Q_{\varepsilon''} \approx \frac{1}{\varepsilon''} \cdot \frac{\iiint_{\text{Resonator}} E_y^2(x, z) \, dx dy dz}{\iiint_{\text{Probe}} E_y^2(x, z) \, dx dy dz} \quad (51)$$

Analog zu den Formeln 49a-49d kommt man auf folgenden Zusammenhang zwischen dem Kehrwert der Güte und der Eindringtiefe.

$$\frac{1}{Q_{\varepsilon''}} = \frac{4A_{\text{Probe}}}{baL} \varepsilon'' y_{\text{Probe}} \quad (52)$$

Somit lässt sich mit Hilfe der bekannten Werte für  $A_{\text{Probe}}$ ,  $b$ ,  $a$  und  $L$  aus der Steigung des Graphen in Abbildung 10 ein Wert für  $\varepsilon''$  berechnen. Allerdings sind uns keine Abmessungen für die Kapillare und somit für  $A_{\text{Probe}}$  bekannt.

## Literatur

- [1] Collin, Grundlagen der Mikrowellentechnik, Verlag Technik Berlin, 1973
- [2] Vilbig, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik I, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1953
- [3] Praktikumsanleitung

## A Messprotokoll