

Protokoll zum Versuch Elektronisches Rauschen

Tina Clauß, Jan Steinhoff
Betreuer: Dr. Reichmann

8. Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	4
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	Charakterisierung von elektronischem Rauschen	4
2.2	Das Rauschspektrum und die Autokorrelationsfunktion	5
2.3	Veränderung des Rauschens durch lineare Filter	6
2.4	Verbesserung des Signal-/Rausch-Verhältnisses	6
3	Versuchsaufbau und Messprinzip	7
4	Auswertung	7
4.1	Qualitative Erfassung des Rauschens	7
4.2	Quantitative Rauschmessungen	8
4.3	Messungen zum Signal-/Rausch-Verhältnis und seiner Verbesserung	10
A	Messprotokoll	17

1 Aufgabenstellung

1. Qualitative Erfassung des Rauschens
2. Quantitative Rauschmessungen
3. Messungen zum Signal-/Rausch-Verhältnis und seiner Verbesserung

2 Theoretische Grundlagen

In der physikalischen Messtechnik sind Rauscherscheinungen häufig unerwünscht, weil sie sich mit dem eigentlich zu messenden Signal überlagern und so die Messgenauigkeit verringern. Beispiele für Rauscherscheinungen sind:

- Die thermische Bewegung der Elektronen, die neben dem geordneten Stromfluss auftritt (*Nyquist- oder Johnson- Rauschen*)
- *Thermisches Rauschen*, das durch Energieaustausch über Phononen entsteht
- Das durch die Photonenstatistik entstehende *Hintergrundrauschen*
- *Generations- Rekombinationsrauschen* sowie *1/f-Rauschen*, das aufgrund von Ladungsträgerzahlschwankungen in Halbleitern und Gasentladungen auftritt
- Das *Schrotrauschen* in Elektronenröhren, bei dem sich das Auftreffen einzelner Elektronen auf der Anode bemerkbar macht
- In empfindlichen mechanischen Systemen (z.B. Galvanometern) stellt die *Brownsche Bewegung* eine Rauscherscheinung dar

Diese Rauscheffekte entstehen durch die quantenhafte bzw. statistische Natur der physikalischen Vorgänge.

2.1 Charakterisierung von elektronischem Rauschen

Das elektronische Rauschen macht sich in einer statistisch verteilten Spannung $U_R(t)$ bemerkbar. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung¹ besitzt immer den Mittelwert null und stellt in der Praxis oft eine Gaußsche Verteilung dar. Die Standardabweichung dieser Verteilung wird mit U_{Reff} bezeichnet.

Die durch das Rauschen erzeugte Leistung $P_R = U_R \cdot I = \frac{U_R^2}{R}$ wird Rauschleistung genannt. Im Gegensatz zur Spannung U_R verschwindet ihr Mittelwert nicht und ist daher zur Beschreibung der Größe des Rauschens geeignet. Die Mittelung über U_R^2 ergibt gerade die Varianz von U_R , also U_{Reff}^2 . Man erhält dann:

$$P_{Reff} := \overline{P_R(t)} = \frac{U_{Reff}^2}{R} \quad (1)$$

¹Es spielt keine Rolle, ob man ein Ensemble oder die zeitliche Verteilung betrachtet, es handelt sich um einen sog. stationären ergodischen Prozess. Man kann sogar diskrete Messwerte in beliebig großen Zeitabständen zur Mittelwertbildung benutzen

Weil zwei Rauschquellen i.a. unkorreliert sind ($\overline{U_{R1}U_{R2}} = \overline{U_{R1}} \cdot \overline{U_{R2}}$), gilt $\overline{(U_{R1} + U_{R2})^2} = \overline{U_{R1}^2} + \overline{U_{R2}^2}$, d.h. ihre Rauschleistungen addieren sich. Die Rauschleistung kann gemessen werden durch Umwandlung in thermische Energie, unter Benutzung geeigneter Diodenkennlinien (in Versuch von Gerät QRV2 realisiert) oder mittels AD-Wandlung und anschließender digitaler Berechnung.

Für einen ohmschen Widerstand R und $hf \ll kT$ (für technisch interessante Fälle immer erfüllt) verhält sich das Rauschen in einem Frequenzintervall Δf nach der Nyquist-Formel [2]:

$$U_{Ref}^2 = 4kTR\Delta f \quad (2)$$

Im Fall einer Leistungsanpassung an ein Messgerät ($R = R_{Mess}$) wird unter Berücksichtigung der Spannungsteilerregel ($U_{Mess} = U_{Ref}/2$) eine Leistung von $P_N = kT\Delta f$ an das Messgerät übertragen.

2.2 Das Rauschspektrum und die Autokorrelationsfunktion

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann man ermitteln, wie sich die Rauschleistung auf verschiedene Frequenzen verteilt. Es ist dann möglich, ein Signal in einen Frequenzbereich mit geringem Rauschen zu legen. Das Rauschleistungsspektrum $p_R(f)$ muss die Gleichung

$$P_{Ref} = \int_{-\infty}^{\infty} p_R(f)df \quad (3)$$

erfüllen. Das wiederum führt auf [1]:

$$p_R(f) = \frac{1}{R} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|u_{R,T}(f)|^2}{T} \quad \text{mit} \quad u_{R,T}(f) = \int_{-T/2}^{T/2} U_R(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (4)$$

Die Rauschleistung in einem Frequenzbereich erhält man dann durch Integration von $2p_R(f)$ über diesen Bereich².

Die Fouriertransformierte des Rauschleistungsspektrums ist die Autokorrelationsfunktion (Wiener-Chintschin-Theorem). Die AKF ist definiert durch:

$$AKF(t) = \frac{1}{R} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_R(\tau)U_R(\tau - t)d\tau \quad (5)$$

Das Wiener-Chintschin-Theorem ist bis auf den Faktor $1/T$ identisch mit dem Faltungssatz der Fouriertransformationen angewendet auf Gleichung 4³. Es gilt: $AKF(\tau = 0) = P_{Ref}$. Häufig wird die AKF so normiert, dass $AKF(\tau = 0) = 1$ ist.

Häufig hat man es wie bei der Nyquist-Formel mit einem konstanten Leistungsspektrum zu tun (weißes Rauschen). Die AKF ist dann nach dem Wiener-Chintschin-Theorem deltaförmig ($AKF = 0$ für $\tau \neq 0$), das Rauschen wird durch Bildung der AKF also herausgefiltert. Ein vom Rauschen überlagertes Signal macht sich im Rauschspektrum durch einen oder mehrere Peaks bemerkbar, was zu einer periodischen, nichtverschwindenden AKF führt. Man kann also ein Signal im Rauschleistungsspektrums oder in der AKF erkennen. Die Phase geht allerdings nach Gleichung 4 verloren.

²Die 2 entsteht dadurch, dass auch negative Frequenzen berücksichtigt werden müssen.

³Zu beachten ist der Betrag in Gleichung 4 und $FT_{-1}\{u_R^*(\omega)\} = U_R(-t)$

2.3 Veränderung des Rauschens durch lineare Filter

Speist man eine Spannung u_e (z.B. Rauschen) in ein Netzwerk aus linearen Bauelementen ein, dann lässt sich die Ausgangsspannung u_a im *Frequenzbereich* bekanntlich schreiben als:

$$u_a(\omega) = g(\omega) \cdot u_e(\omega) \quad (6)$$

$g(\omega)$ ist dabei der Frequenzgang des Filters. Für das Leistungsspektrum erhält man demzufolge:

$$p_a(\omega) = |g^2(\omega)| \cdot p_e(\omega) \quad (7)$$

Stellt $p_e(\omega)$ ein kontinuierliches Leistungsspektrum dar (weißes Rauschen), so kann man die gesamte Rauschleistung am Ausgang $P_{a,eff}$ in einfacher Weise mit Hilfe der effektiven Bandbreite Δf_{eff} nach der Formel $P_{a,eff} = g_{max}^2 \cdot p_e(f) \cdot \Delta f_{eff}$ bestimmen. Dabei ist g_{max}^2 die maximale Leistungsverstärkung. Ein Vergleich mit Gleichung 7 liefert unter Verwendung von Gleichung 3:

$$\Delta f_{eff} = \frac{1}{g_{max}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |g^2(f)| df \quad (8)$$

Im *Zeitbereich* hat man es statt mit algebraischen Gleichungen mit Differentialgleichungen zu tun, so dass sich das Verhalten des Filters nicht in einer der Gleichung 6 analogen Weise schreiben lässt. Führt man eine inverse Fouriertransformation von Gleichung 6 durch, so erhält man mit Hilfe des Faltungssatzes:

$$U_a(t) = \int_0^{\infty} U_e(t - \tau) G(\tau) d\tau \quad (9)$$

Die untere Integrationsgrenze kann null gesetzt werden, weil die Ausgangsspannung nicht von zukünftigen Eingangsspannungen abhängen kann (Kausalität, $G(\tau) = 0$ für $\tau < 0$). Führt man die inverse Fouriertransformation an Gleichung 7 durch, dann erhält man mit dem Faltungssatz und dem Wiener-Chintschin-Theorem:

$$AKF_a(t) = \int_0^{\infty} AKF_e(t - \tau) AKF_G(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad AKF_G(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) G(\tau - t) d\tau \quad (10)$$

Bei einem Bandpass muss der *Einschwingvorgang* berücksichtigt werden. In einfachen Fällen besitzt die Einhüllende der Ausgangsspannung eine exponentielle Zeitabhängigkeit. Zwischen der Zeitkonstanten τ und der effektiven Bandbreite Δf_{eff} besteht dann oft der Zusammenhang:

$$\frac{\Delta f_{eff}}{f_0} = \frac{1}{\pi \cdot \tau} \quad (11)$$

f_0 ist dabei die Mittenfrequenz.

2.4 Verbesserung des Signal-/Rausch-Verhältnisses

Das Signal-/Rausch-Verhältnis (engl. SNR = signal to noise ratio) ist definiert als das Verhältnis von Signalleistung zu Rauschleistung und wird in der Regel in Dezibel angegeben.

Eine Möglichkeit, das SNR zu verbessern, besteht darin, das Verschwinden des Mittelwertes von U_R auszunutzen. So kann man bei einem nahezu konstanten Signal durch

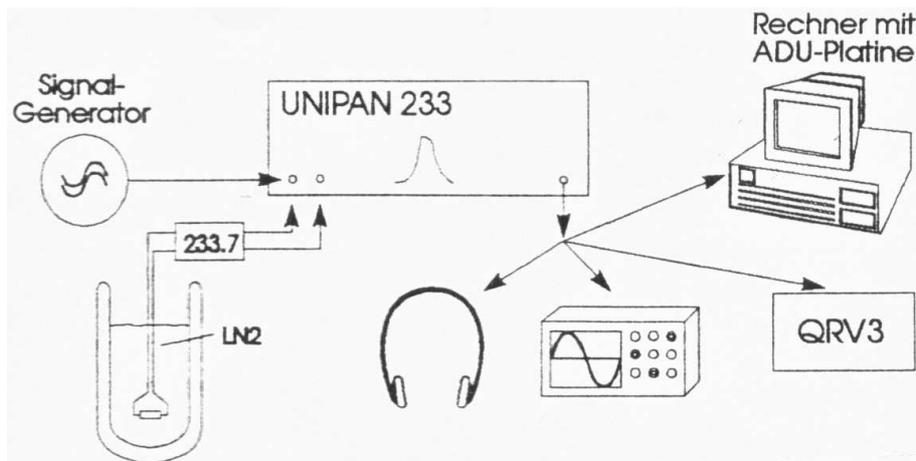


Abbildung 1: Der Versuchsaufbau, schematisch [3]

Mittelung das SNR verbessern. Bei periodisch wiederholt erzeugten Signalen (z.B. Abklingen der Fluoreszenz bei Impulsanregung) können alle Signale addiert werden, wobei das Rauschen nur mit der Wurzel der Zahl der Additionen zunimmt (*Spektrenakkumulation*).

Eine andere Möglichkeit, das SNR zu verbessern, gelingt mit Hilfe der Fouriertransformation (nur bei periodischen Signalen). Die Nutzung der AKF und des Rauschleistungsspektrums bei der Suche nach Signalen wurde bereits in Abschnitt 2.2 erläutert. Bei der *Frequenzselektion* werden alle für das Signal unwesentlichen Frequenzen weggeschnitten (mit einem Bandpass oder mittels FFT am Rechner), so dass die Rauschleistung verringert wird.

3 Versuchsaufbau und Messprinzip

Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt. Zur Signalerzeugung stehen ein Signalgenerator, ein Rauschgenerator und ein geschirmter ohmscher Widerstand zur Verfügung. Der Widerstand kann wahlweise bei Zimmertemperatur oder in einem Dewar mit flüssigem Stickstoff verwendet werden. Zur Herstellung beliebiger SNR kann das Signal des Signalgenerators und das Signal des Rauschgenerators mit einer Widerstandskombination, wie in Abbildung 2 dargestellt, gemischt werden. Zur Auswertung der Signale dienen ein Lautsprecher, ein Speicheroszilloskop, ein quadratisches Röhrenvoltmeter QRV2 und ein Rechner mit ADU-Platine. Das Signal kann optional mit dem Unipan 233 verstärkt werden.

4 Auswertung

4.1 Qualitative Erfassung des Rauschens

Das Rauschen des Verstärkers bei Berührung des Eingangs ist in Abbildung 3 zu sehen. Zuerst wurde der Zeitbereich brachtet, wobei über 64 Durchläufe gemittelt wurde. Es ist deutlich ein Signal mit ca. 50 Hz erkennbar. Hier wurde ausgenutzt, dass das Rauschen mit zunehmender Mittelung gegen null geht, das Signal hingegen nicht. Im Spektrum sind mehrere Peaks zu sehen, der grösste bei 50 Hz.

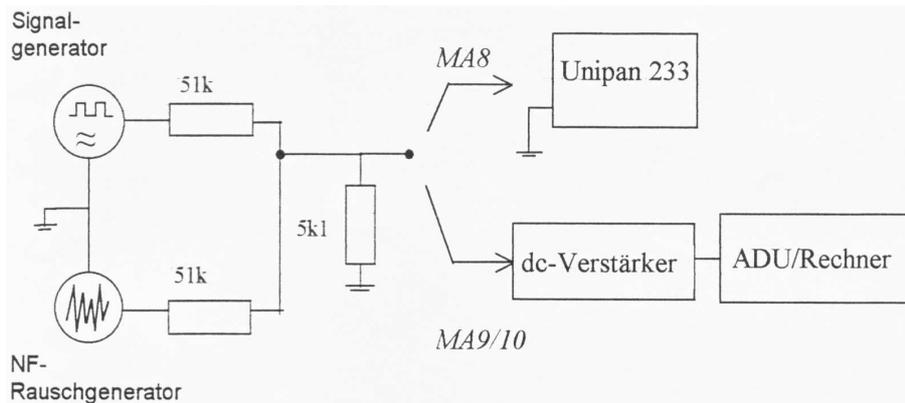


Abbildung 2: Versuchsaufbau zur demonstration der Methoden zur Verbesserung des SNR [3]

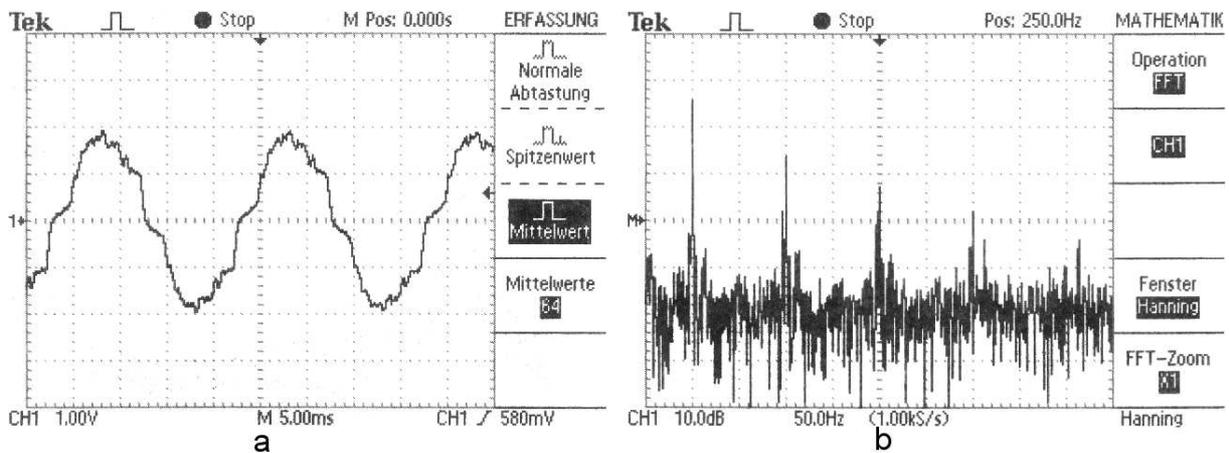


Abbildung 3: Rauschen unter Berührung des Unipan-Eingangs: a) Zeitbereich mit Mittelung, b) Frequenzbereich (FFT)

Erhöht man die Frequenzselektion des Verstärkers, dann erhält man ein Spektrum wie in Abbildung 4. Man kann so durch Einspeisen von weißem Rauschen den Frequenzgang des Verstärkers messen. Das Rauschen stellt in diesem Fall kein Störsignal, sondern ein Nutzsignal dar.

Die Einschalteteffekte des Verstärkers sind in Abbildung 5 dargestellt. Die Einhüllende des Signals zeigt ein exponentielles Verhalten. Wie erwartet verringert sich die Zeitkonstante mit zunehmender Bandbreite.

4.2 Quantitative Rauschmessungen

Der Frequenzgang des Verstärkers wurde mit Hilfe eines Sinussignals variabler Frequenz vermessen. Das Ergebnis ist auf den Abbildungen 6 bis 8 dargestellt. Die Selektivität betrug dabei 36 dB. Der Frequenzgang ist qualitativ auch schon auf Abbildung 4 zu sehen. Bei einer Selektivität von 0 dB ist der Betrag der Übertragungsfunktion unabhängig von der Frequenz nahezu eins.

Das Spektrum des Rauschgenerators ist in Abbildung 9 dargestellt. Das weiße Rauschen besitzt eine bandbreite von ca. 30 kHz. Das weiße Rauschen des Rauschgenerators wurde

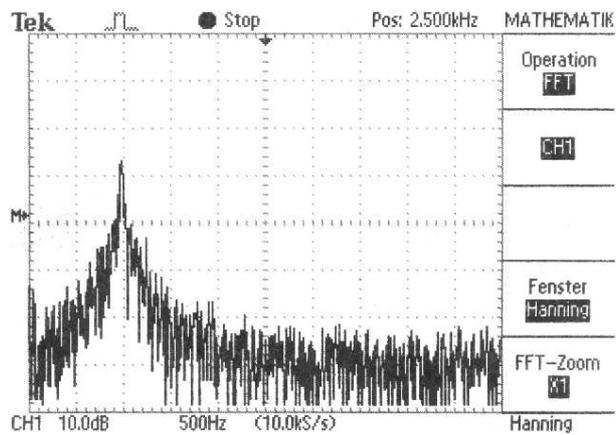


Abbildung 4: Amplitudenspektrum des Rauschens bei erhöhter Selektion

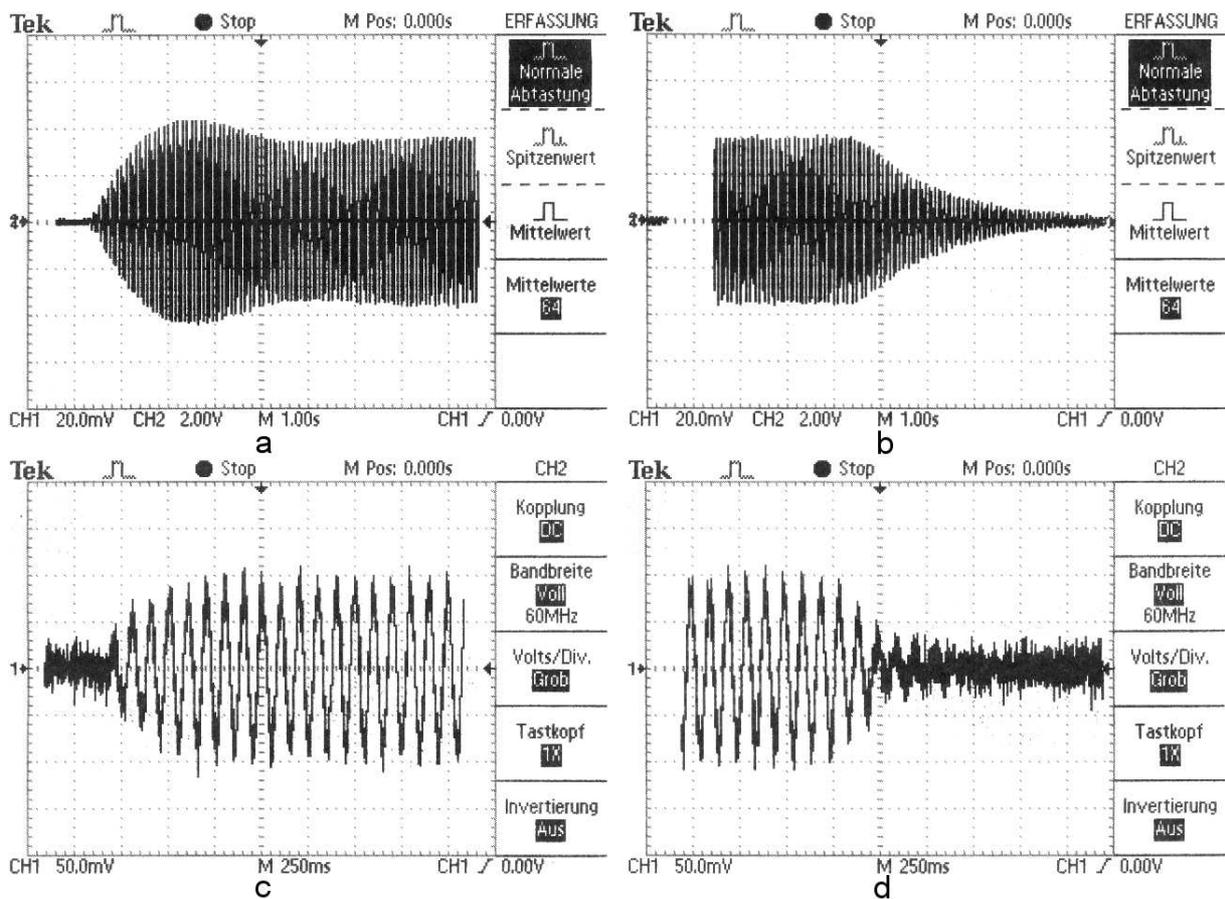


Abbildung 5: Zeilverhalten des Verstärkers: a) schmalbandig, einschalten; b) schmalbandig, ausschalten; c) breitbandig, einschalten; d) breitbandig, ausschalten

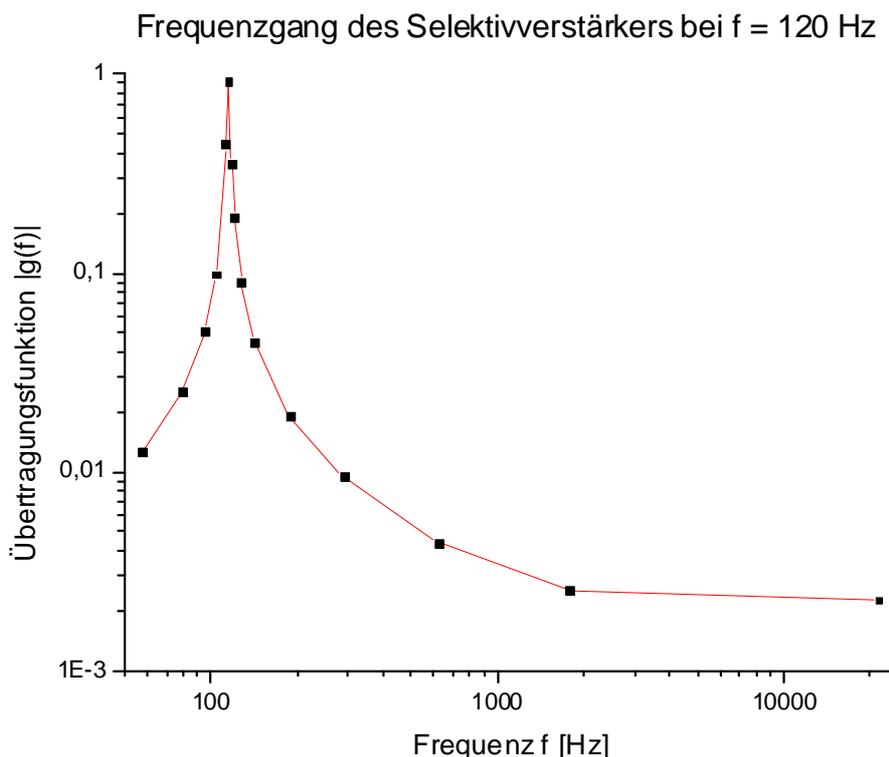


Abbildung 6: Frequenzgang des Unipan 233

dazu benutzt, die Bandbreite des Verstärkers zu messen. Dazu wurde das Rauschen in den Verstärker eingespeist und dann U_{Reff} am Ausgang mit dem QRV2 gemessen. Die Bandbreite ist proportional zu U_{Reff}^2 . Da bei einer Selektivität von 0 dB die Bandbreite bekannt ist (30 kHz), kann so die Bandbreite für verschiedene Mittenfrequenzen gemessen werden. Das Ergebnis für eine Selektivität von 36 dB zeigt Abbildung 10. Die Bandbreite ist offensichtlich proportional zur Mittenfrequenz.

Weil man also in der Lage ist, über die Mittenfrequenz die Bandbreite zu varrieren, kann nun Gleichung 2 überprüft werden. Dies geschah bei Zimmertemperatur und in flüssigem Stickstoff. Die Messung der Spannung erfolgte mit dem Rechner. Das Signal wurde vorher mit dem Unipan-Verstärker und einem OPV verstärkt. Um die Gesamtverstärkung der Aperatur zu ermitteln, wurde ein keines Sinussignal an den Eingang des Verstärkers gelegt und die Spannungsanzeige des Unipan mit dem Messwert des Computers verglichen. Unter Beachtung des -20 dB Vorverstärkers ergab sich eine Gesamtverstärkung von 2500000. Das Ergebnis ist auf den Abbildungen 11 und 12 zu sehen. Bei den Theoriekurven wurde von einem 50,7 k Ω Widerstand ausgegangen. Die gemessenen Kurven besitzen bei beiden Temperaturen eine grössere Steigung als die Theoriekurven. Das könnte am Rauschen des Verstärkers liegen, denn das Rauschen des Verstärkers nimmt wahrscheinlich ebenfalls linear mit der Bandbreite zu.

4.3 Messungen zum Signal-/Rausch-Verhältnis und seiner Verbesserung

Die folgenden Messungen wurden nach dem Aufbau auf Abbildung 2 durchgeführt. Durch erhöhen der Frequenzselektion am Unipan-Verstärker kann das Signal-/Rausch-Verhältnis

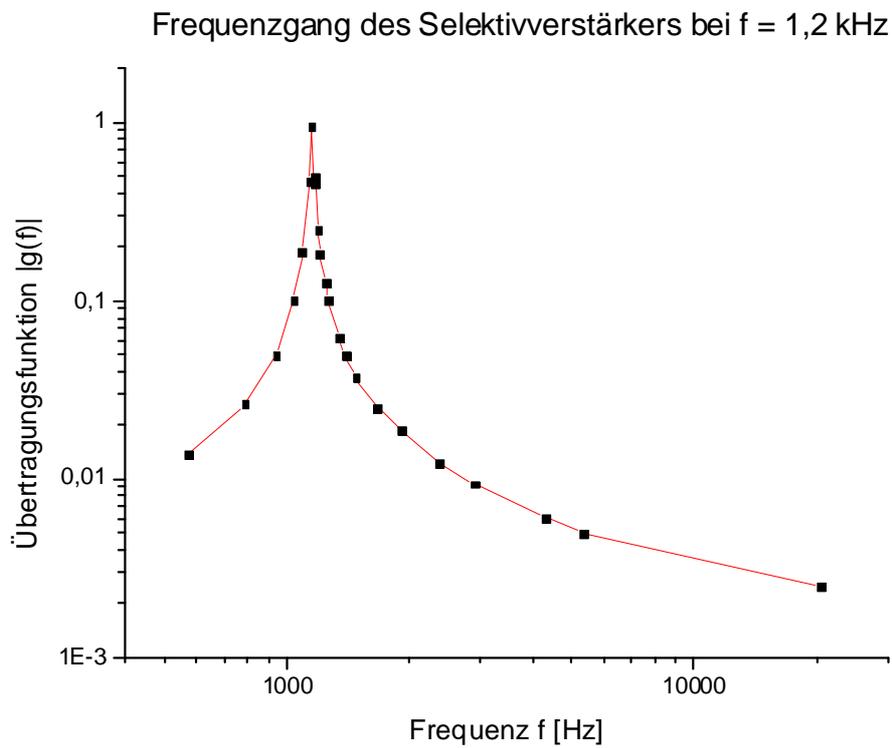


Abbildung 7: Frequenzgang des Unipan 233

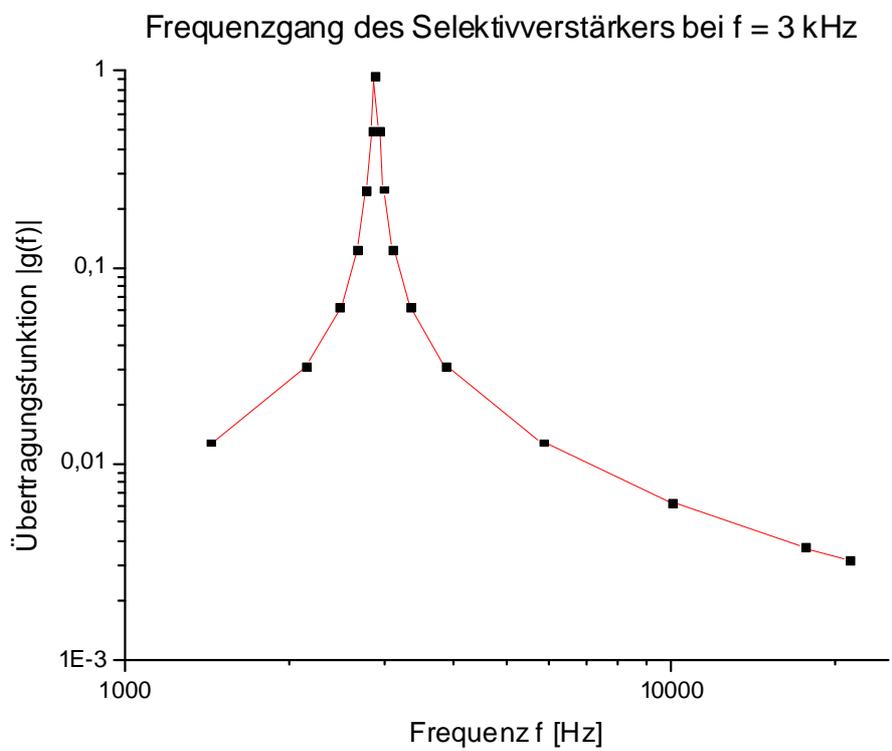


Abbildung 8: Frequenzgang des Unipan 233

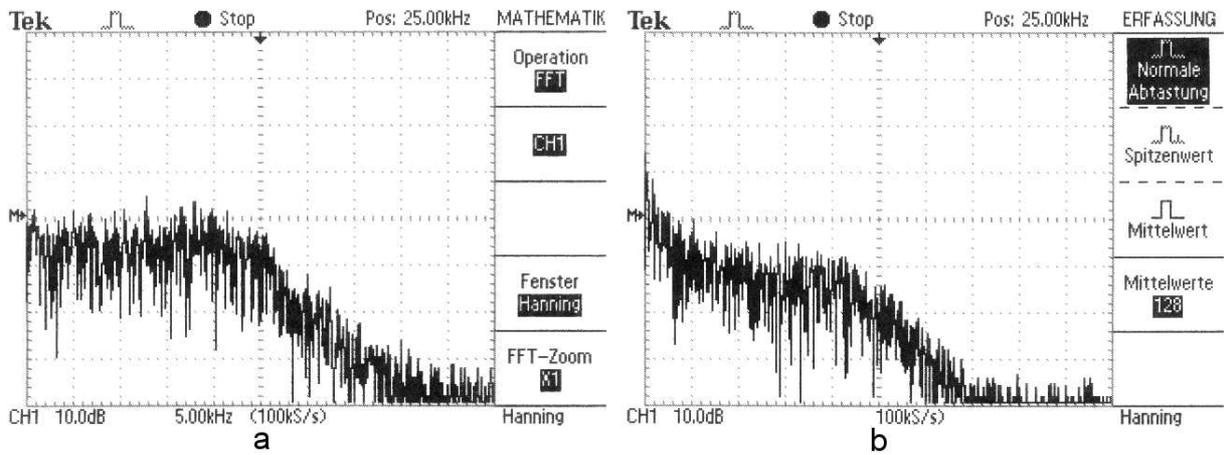


Abbildung 9: Amplitudenspektrum des Rauschgenerators: a) weißes Rauschen, b) rosa Rauschen

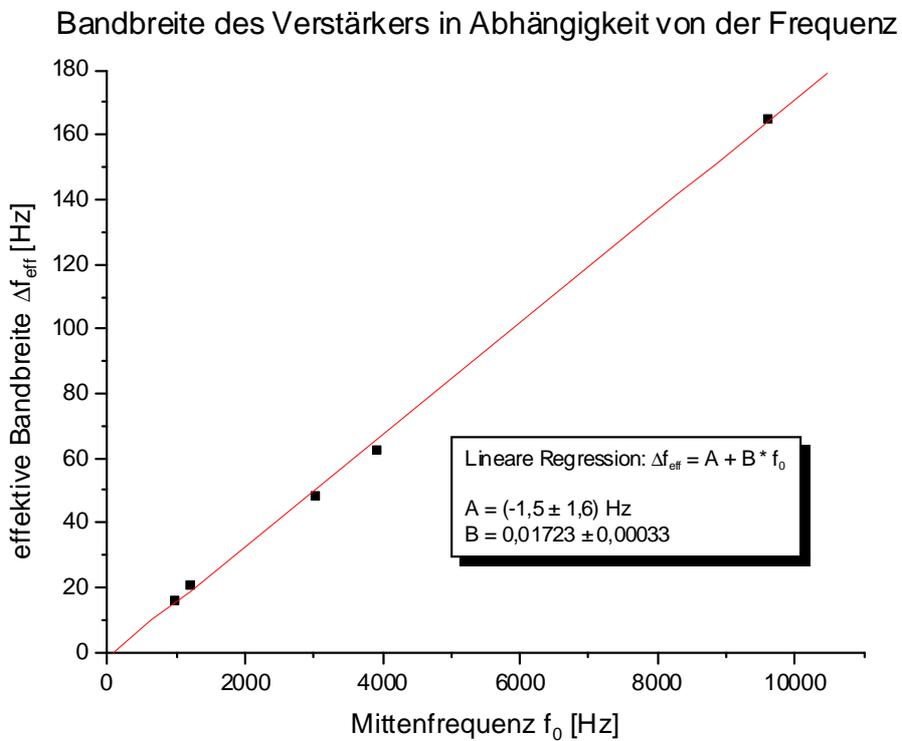


Abbildung 10: Effektive Bandbreite des Unipan 233 bei einer Selektivität von 36 dB

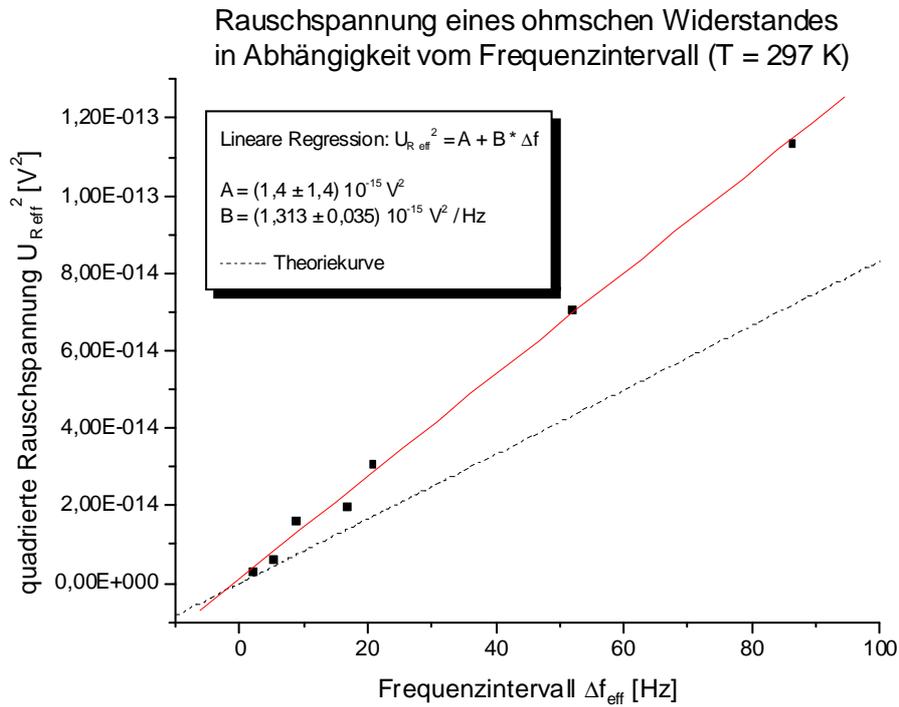


Abbildung 11: Überprüfung der Frequenzabhängigkeit von Gleichung 2 bei T = 297 K

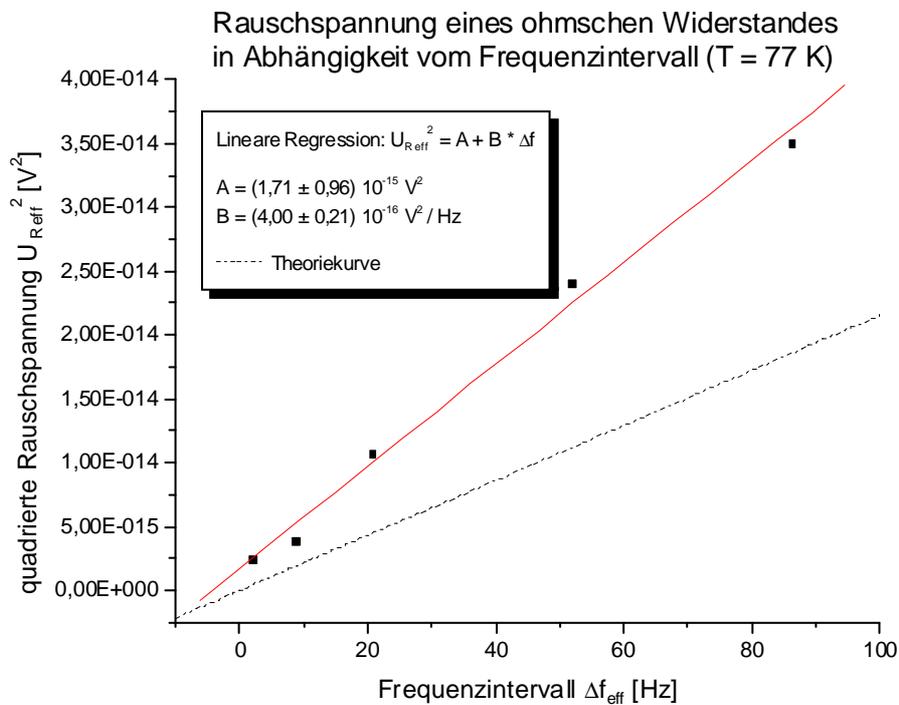


Abbildung 12: Überprüfung der Frequenzabhängigkeit von Gleichung 2 bei T = 77K

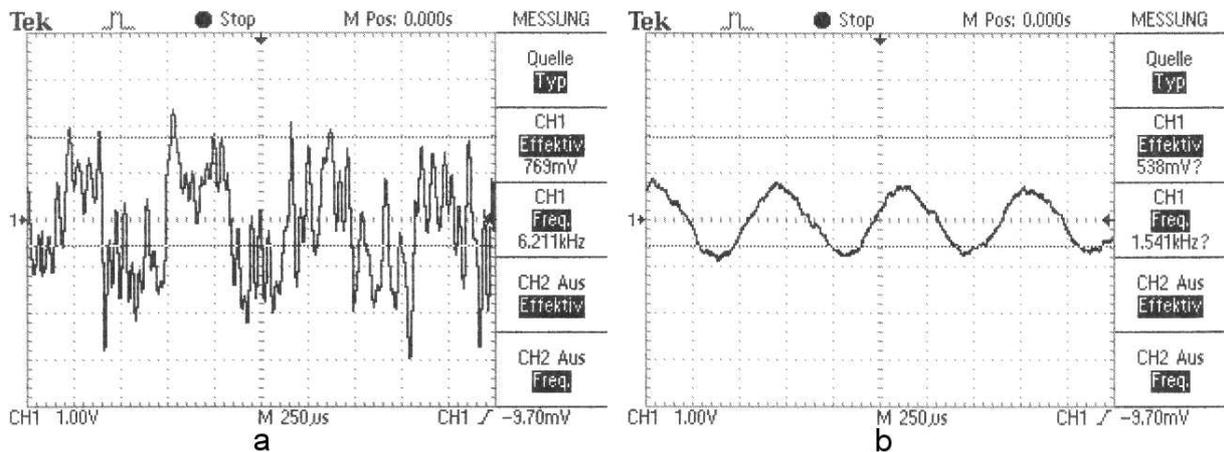


Abbildung 13: Rechtecksignal mit Rauschen: a) ohne Filter, b) nach Bandpass bei ca. 1,5 kHz, Selektivität 18 dB

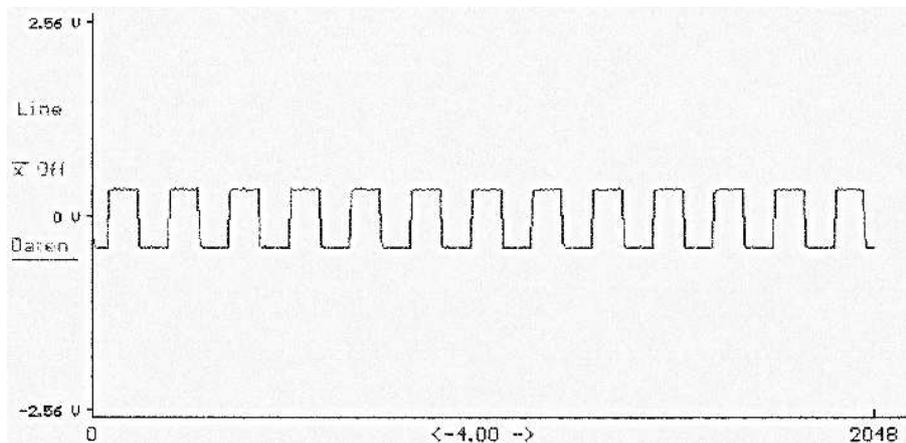


Abbildung 14: Rechtecksignal ohne Rauschen

verbessert werden, wie Abbildung 13 zeigt. Weil der Verstärker aber die Oberfrequenzen abschneidet, sieht das Rechtecksignal nach dem Filter wie ein Sinus aus. Am Rechner wird dies mit Hilfe der FFT gemacht, wobei die Oberfrequenzen aber unverändert blieben. Das Ergebnis ist daher auch deutlich besser, siehe Abbildung 14 bis 16. Die zugehörige AKF ist auf Abbildung 17 zu sehen. Sie ist wie erwartet periodisch, und zwar in diesem Fall eine Sägezahnkurve. Der Sägezahn beginnt immer bei eins, man erhält also keine Information über die Phase des Ausgangssignals. Zum Vergleich ist noch die AKF eines reinen Rauschsignals auf Abbildung 18 dargestellt. Die AKF wird am Ende immer ungenauer, weil nur endlich viele Messwerte zur Verfügung stehen.

Die Verbesserung des SNR durch Akkumulation ist in Abbildung 19 dargestellt. Das SNR ist proportional zur Zahl der Mittelungen. Weil das SNR über die Rauschleistung definiert ist, bedeutet das für die Rauschspannung ein Anwachsen proportional zur Wurzel der Mittelungen (das Signal wächst proportional zur Zahl der Mittelungen).

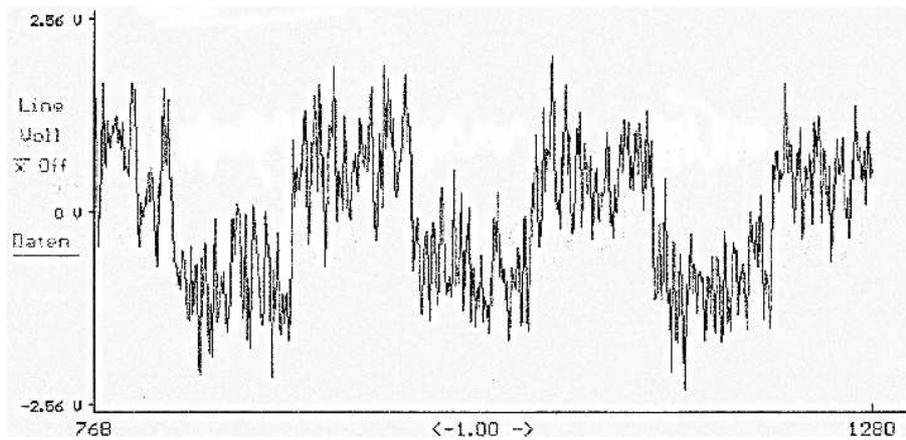


Abbildung 15: Rechtecksignal mit Rauschen

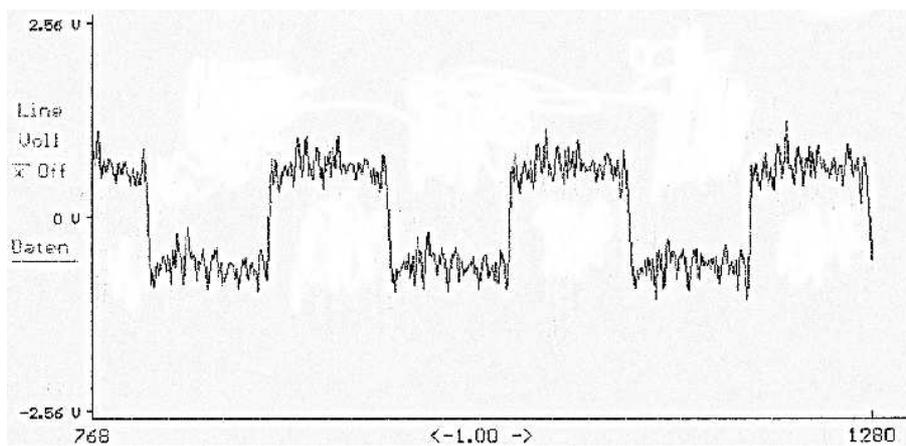


Abbildung 16: Verrauschtes Signal nach Frequenzselektion mit dem Rechner

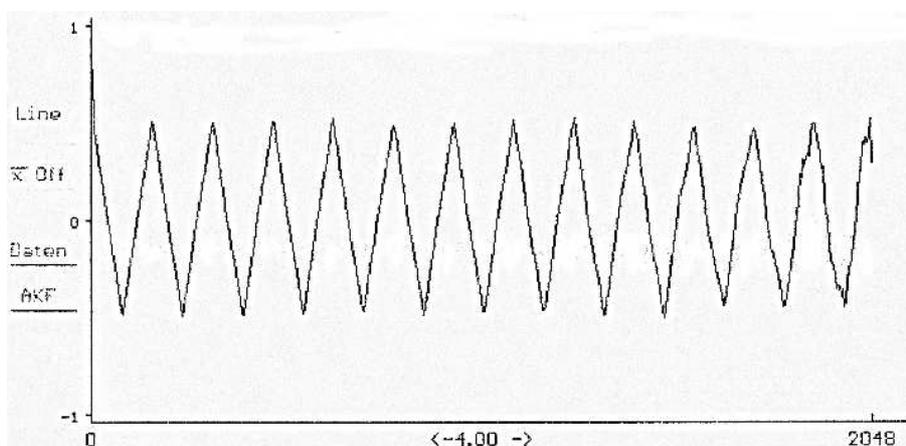


Abbildung 17: Die normierte AKF des Rechtecksignals mit Rauschen

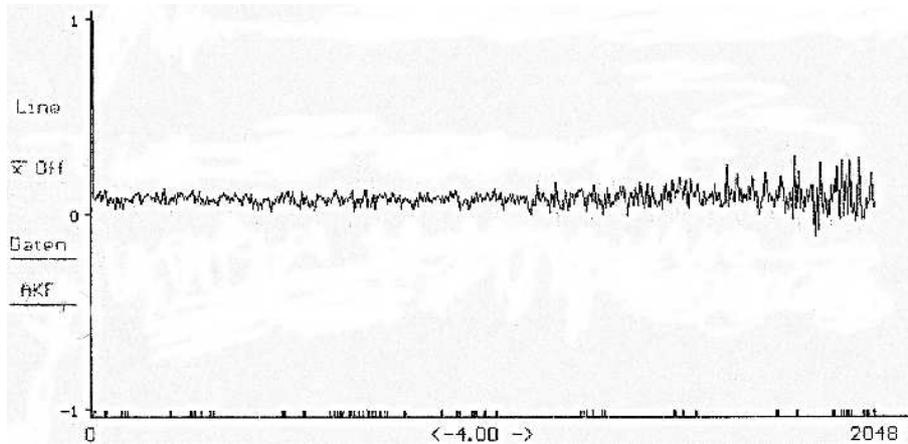


Abbildung 18: Die normierte AKF von einem reinen Rauschsignal

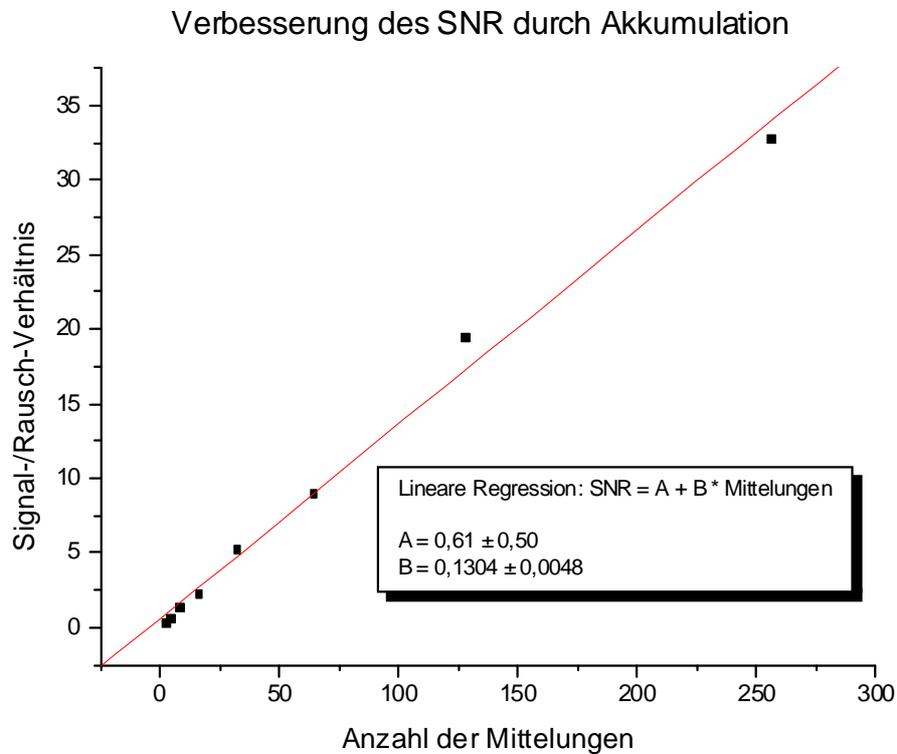


Abbildung 19: Verbesserung des SNR mittels Akkumulation

Literatur

- [1] F. H. Lange, Signale und Systeme, VEB Verlag Technik Berlin 1971
- [2] Meinke, Gundlach, Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, 4. Auflage, Springer Verlag 1986
- [3] Praktikumsanleitung

A Messprotokoll