Protokoll zum Versuch Ultraschall

Tina Clauß, Jan Steinhoff Betreuer: Dr. Zöllner

17. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	4
2	Theoretische Grundlagen	4
	2.1 Beugung von Licht an Phasengittern	4
	2.2 Abbildung von Phasengittern	5
	2.3 Erzeugung von Ultraschall	5
3	Versuchsaufbau und Messprinzip	5
4	Auswertung	7
	4.1 Bestimmung der Brennweite f_2	7
	4.2 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus dem Beugungsbild	7
	4.2.1 ohne Reflektor \ldots	7
	4.2.2 mit Reflektor	12
	4.3 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus dem Wellengitterbild	12
	4.4 Fotografieren eines Kreuzgitters	14
5	Zusammenfassung der Ergebnisse	14
A	Messprotokoll	15

1 Aufgabenstellung

- 1. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in einer unbekannten Flüssigkeit mit Hilfe der Lichtbeugung an Ultraschallwellen durch Forografieren und Ausmessen
 - (a) der Beugungserscheinung
 - (b) des Wellengitterbildes.
 - (c) Bestimmung der Brennweite f_2
 - (d) Vergleich der Ergebnisse aus a und b
- 2. Fotografieren eines Kreuzgitters (Beugungs- und Wellenbild)

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Beugung von Licht an Phasengittern

Die Wirkung eines optischen Gitters in der Ebene z = 0 auf die elektrische Feldstärke kann durch eine komplexe Transmissionsfunktion beschrieben werden:

$$T(x,y) = \sigma(x,y)e^{i\delta(x,y)} \tag{1}$$

Bei einem Phasengitter ist $\sigma(x, y) = 1$, d.h. das Gitter lässt die Amplitude unverändert. In diesem Versuch wird das Phasengitter durch ebene Ultraschallwellen erzeugt, es gilt also:

$$\delta(x,y) = a\sin(2\pi f_0 x) \quad \text{bzw.} \quad T(x,y) = e^{ia\sin(2\pi f_0 x)} \tag{2}$$

Dabei ist *a* die maximale Phasenverschiebung und f_0 die Ortsfrequenz des Phasengitters (das Reziproke der Gitterkonstanten *g*, d.h. $f_0 = 1/g$). T(x, y) kann nun nach Besselfunktionen $I_k(a)$ 1. Art entwickelt werden:

$$T(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(a) e^{i2\pi k f_0 x}$$
(3)

Eine ebene Welle in z-Richtung wird beschrieben durch:

$$E(z,t) = E_0 e^{i2\pi(ft - z/\lambda)} \tag{4}$$

Dabei ist E_0 die Amplitude des elektrischen Feldes, f die Frequenz des Lichtes und λ seine Wellenlänge. Lässt man diese Welle auf das Phasengitter treffen, dann ergibt sich für die Feldstärke $\overline{E}(x, y, z, t)$ unmittelbar hinter dem Gitter:

$$\bar{E}(x,y,z,t) = T(x,y)E(z,t) = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(a)e^{i2\pi \left[ft - \frac{1}{\lambda}\left(z - kx\frac{\lambda}{g}\right)\right]}$$
(5)

Man erhält also eine Schar ebener Wellen, deren Wellennormalenvektoren \vec{n}_k aus dem Argument abgelesen werden können:

$$\vec{n}_k = \begin{pmatrix} k\frac{\lambda}{g} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
(6)

Diese Vektoren geben die Richtung der Maxima im Fraunhoferschen Beugungsbild an. Die Winkel α_k der Beugungsmaxima bzgl. der z-Achse sind also:

$$\tan \alpha_k = k \frac{\lambda}{g} \tag{7}$$

Für kleine Winkel gilt $\tan \alpha_k \approx \sin \alpha_k$, das Beugungsbild ist dann identisch mit dem eines Amplitudengitters der Gitterkonstanten g. Die Intensitäten der einzelnen Maxima nehmen beim Phasengitter aber i.a. nicht stetig mit der Beugungsordnung ab wie beim Amplitudengitter, sondern können abwechselnd zu- und abnehmen.

2.2 Abbildung von Phasengittern

Weil ein Phasengitter nicht auf die Amplitude des Lichtes wirkt, sollte man es eigentlich durch ein Mikroskop betrachtet nicht sehen können. Es sollte nur eine weisse Fläche zu sehen sein. Nach der Abbeschen Theorie der optischen Abbildung stimmt dies aber nur, wenn auch alle Beugungsordnungen auf die Öffnung des Mikroskops treffen. Da dies in der Praxis nie der Fall ist, wird so dass Bild im Mikroskop leicht verfälscht, was zu einem endlichen Auflösungsvermögen führt. Da bei einem Phasengitter die Intensität nicht stetig mit der Beugungsordnung abnimmt, werden in diesem Versuch wesentliche Beugungsordnungen durch die Öffnung abgeschnitten, so dass statt einer gleichmässig ausgeleuchteten Fläche abwechselnd helle und dunkle Streifen im Mikroskop erscheinen. Dies gilt aber nur bei großen Phasenhüben a, bei kleinen Phasenhüben muss man sich dem Schlierenverfahren von Töpfler oder dem Phasenkontrastverfahren von Zernike bedienen.

2.3 Erzeugung von Ultraschall

Zu den mechanischen Ultraschallgebern zählen die Galtonpfeife und der Gasstromschwinggenerator. Sie liefern Frequenzen bis etwa 40 kHz. Magnetostriktive Ultraschallgeber bestehen aus einem ferromagnetischen Stab, der durch ein parallel zum Stab verlaufendes magnetisches Wechselfeld zu Schwingungen angeregt wird. Die erreichbaren relativen Längenänderungen des Stabes sind bei reinem Nickel besonders groß. Piezoelektrische Ultraschallgeber nutzen den reziproken piezoelektrischen Effekt zur Erzeugung von Schwingungen. Dies geschieht durch Anlegen eines elektrischen Wechselfeldes entlang einer polaren Achse des Piezokristalls. Der Kristall wird so zu Dicken- und Längsschwingungen angeregt (die relative Längenänderung ist proportional zur angelegten Spannung). Die Grundschwingung einer Platte besitzt eine Frequenz ν_0 von:

$$\nu_0 = \frac{1}{2d} \frac{\sqrt{c_{11}}}{\rho} \tag{8}$$

Dabei ist d die Dicke der Platte, ρ ihre Dichte und c_{ik} das richtungsabhängige Elastizitätsmodul. In diesem Versuch wird eine 0.5 mm dicke Platte aus Piezolan verwendet, mit einer Resonanzfrequenz von ca. 6 MHz.

3 Versuchsaufbau und Messprinzip

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 dargestellt. In einer Flüssigkeit werden durch einen Piezoschwinger ebene Ultraschallwellen erzeugt. Die dadurch in der Flüssigkeit erzeugten



Abbildung 1: Versuchsaufbau für die Messung der Schallgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit durch Beugung [1]

Dichteschwankungen erzeugen eine Schwankung der Brechzahl und damit ein Phasengitter. Dieses Phasengitter wird mit parallem Licht einer Spektrallampe beleuchtet. Als Lichtquelle dient eine Quecksilberhochdrucklampe HBO50. Mit Hilfe eines Interferenzfilters wird nahezu monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 546$ nm erzeugt. Die Linse O_2 projeziert dann das Fraunhofersche Beugungsbild auf den Schirm *S* (Kamera). Ein Kreuzgitter kann durch einsetzten eines um 45° geneigten Reflektors erzeugt werden.

Im Gegensatz zu Abschnitt 2.1 ist das Phasengitter jetzt aber zeitabhängig, es wird beschrieben durch die Transmissionsfunktion:

$$T(x,y) = e^{ia\sin(Ft - x/D)}$$
(9)

Dabei ist F die Frequenz des Schalls und D seine Wellenlänge in der Flüssigkeit. Der maximale Phasenhub a kann aus der maximalen Änderung des Brechungsindex der Flüssigkeit Δn berechnet werden:

$$a = 2\pi \frac{\Delta nL}{\lambda} \tag{10}$$

Dabei ist λ die Wellenlänge des Lichtes und L der vom Licht im Schallfeld zurückgelegte Weg. Analog zu Abschnitt 2.1 erhält man nun für das elektrische Feld hinter dem Gitter:

$$\bar{E} = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(a) e^{i2\pi \left[(f+kF)t - \frac{1}{\lambda} \left(z + kx \frac{\lambda}{D} \right) \right]}$$
(11)

Die Lage der Maxima bleibt also gleich, es ändert sich aber die Frequenz des Lichtes. Seine Frequenz beträgt im k-ten Maximum jetzt:

$$f_k = f + kF$$
 mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (12)

Aus Abbildung 1 liest man ab:

$$\tan \alpha_k = \frac{d_k}{f_2} \tag{13}$$

Die Schallgeschwindigkeit ist damit:

$$c_{us} = \frac{f_2 k \lambda}{d_k} \nu_{us} \tag{14}$$

Die Frequenz des Ultraschalls ν_{us} ist dabei identisch mit der Frequenz des an den Piezokristall angelegten Wechselfeldes.

Die Schallgeschwindigkeit kann ebenfalls durch direkte Beobachtung des Phasengitters bestimmt werden. Dazu muss ein stehendes Ultraschallfeld vorhanden sein, was durch einsetzten eines Reflektors realisiert wird. Dann wird die Linse O_2 durch ein Mikroskop ausgetauscht und das Wellenbild mit einer Kamera fotografiert. Außerdem wird ein Maßstab durch das Mikroskop fotografiert, so dass der Abstand d_s zwischen zwei hellen (oder dunklen) Streifen bestimmt werden kann. Weil dieser Abstand gleich der halben Wellenlänge des Schalls ist, ist die Schallgeschwindigkeit dann:

$$c_{us} = 2d_s \nu_{us} \tag{15}$$

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Brennweite f_2

Um die Brennweite zu bestimmen, verwendeten wir ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr und einen Maßstab. Die Linse wird nun so zwischen Maßstab und Fernrohr gestellt, dass man den Maßstab im Fernrohr scharf sieht. Der Maßstab steht nun im Brennpunkt der Linse. Mit Hilfe der Mittelpunktstrahlen kommt man dann auf folgende Formeln zur Bestimmung der Brennweite f_2 der Linse:

$$f_2 = \frac{d}{\tan \alpha} \tag{16}$$

$$\Delta f_2 = \left| \frac{d}{\tan^2 \alpha} + d \right| \Delta \alpha + \left| \frac{1}{\tan \alpha} \right| \Delta d \tag{17}$$

Dabei ist d der halbe Abstand der zwei Messpunkte auf dem Maßstab und α der halbe Winkel zwischen den Mittelpunktstrahlen, die durch die beiden Messpunkte verlaufen. Unsere Messung ergab:

$$d = (35, 0 \pm 0, 2) \,\mathrm{mm}$$
 $\alpha = (0, 0729 \pm 0, 0018) \,\mathrm{[rad]}$

Zudem muss man den Messfehler bedenken, der sich durch das Einstellen der Position der Linse ergibt. Wir nehmen hierbei ungefähr einen Fehler von 1mm an. Damit ergibt sich folgende Brennweite:

$$f_2 = (48, 0 \pm 2, 5) \,\mathrm{cm}$$

4.2 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus dem Beugungsbild

4.2.1 ohne Reflektor

Für diese Messung verwendeten wir einen Fotoapparat, der anstelle des Schirms (siehe Abbildung 1) angebracht wurde und fotografierten das Beugungsbild mit unterschiedlichen Frequenzen.

Zuvor nahmen wir Belichtungsreihen auf, um die optimale Belichtungszeit zu ermitteln, die



Abbildung 2: Beugungsbild (f = 6,5 MHz; Belichtungszeit 1,5 s)

in diesem Fall 1-2 Sekunden betrug.

Nach anschließender Entwicklung des Films, konnten die Wellengitterbilder mit Hilfe eines Fotometers vermessen und somit die Abstände d_k der jeweiligen Maxima gleicher Ordnung k ermittelt werden.

Mit Hilfe von Formel 14 kann nun die Schallgeschwindigkeit ermittelt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgeführt. Die Schallgeschwindigkeit sollte unabhängig von der Frequenz sein. Um das zu zeigen haben wir die Mittelwerte der Schallgeschwindikeit bei gleicher Frequenz über der Frequenz aufgetragen (siehe Abbildung 3). Der Größtfehler für c_{us} errechnet sich nach folgender Formel, wofür $\Delta d_k = 0,01$ mm und $\Delta \nu_{us} = 0$ angenommen werden.

$$\Delta c_{us} = \left[\frac{\Delta f_2}{f_2} + \frac{\Delta d_k}{d_k} + \frac{\Delta \nu_{us}}{\nu_{us}}\right] c_{us} \tag{18}$$

Mittelt man über alle in Tabelle 1 aufgeführten Werte für c_{us} und berechnet den *Standard-fehler* kommt man auf folgenden Wert:

$$c_{us} = (1325, 55 \pm 4, 0) \,\mathrm{m/s}$$

Eine andere Möglichkeit aus den ermittelten Werten für d_k die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen, besteht zum Beispiel darin d_k für ein bestimmtes k über der Frequenz aufzutragen und lineare Regression durchzuführen. Aus der Steigung m der Kurve, kann nun mit folgender Fomel, die man aus Formel 14 erhält, c_{us} errechnet werden:

$$c_{us} = \frac{f_2 k\lambda}{m} \tag{19}$$

Wir führten dies für k = 1, 2, 3 durch. In den Abbildungen 4-6 sind die Graphen abgebildet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt.

ν_{us} [MHz]	Ordunung	$d_k \; [\mathrm{mm}]$	$c_{us} [\mathrm{m/s}]$	$\Delta c_{us}/c_{us}$ [%]
$5,\!3$	1	$1,\!05$	1320 ± 84	6,3
	2	2,11	1320 ± 78	$5,\!9$
	3	3,11	1342 ± 77	5,7
	4	4,03	1380 ± 78	5,6
	5	$5,\!05$	1375 ± 77	$5,\!6$
	6	6,01	1388 ± 78	$5,\!6$
5,5	1	1,09	1329 ± 84	6,3
	2	2,18	1322 ± 78	$5,\!8$
	3	3,27	1322 ± 76	5,7
5,7	1	1,13	1322 ± 83	6,3
	2	2,26	1322 ± 78	$5,\!8$
$5,\!9$	1	1,18	1316 ± 82	$_{6,2}$
	2	2,34	1322 ± 77	$5,\!8$
	3	3,51	1322 ± 75	5,7
6,1	1	1,22	1316 ± 82	6,2
	2	2,43	1319 ± 77	5,8
	3	3,63	1323 ± 75	5,6
6,3	1	1,26	1316 ± 82	$_{6,2}$
	2	2,49	1329 ± 77	$5,\!8$
	3	3,74	1326 ± 75	$5,\!6$
6,5	1	1,29	1326 ± 82	6,1
	2	2,57	1326 ± 77	$5,\!8$
	3	3,86	1326 ± 75	$5,\!6$
	4	5,16	1322 ± 74	$5,\!6$
6,7	1	1,31	1340 ± 83	6,1
	2	2,68	1310 ± 76	5,7
	3	3,99	1322 ± 75	$5,\!6$
	4	5,32	1321 ± 74	5,5
6,9	1	1,37	1320 ± 81	6,1
	2	2,74	1322 ± 76	5,7
	3	4,1	1323 ± 75	$5,\!6$
	4	5,47	1322 ± 74	5,5
7,1	1	1,42	1310 ± 80	6,1
	2	2,82	1320 ± 76	5,7
	3	4,23	1321 ± 74	$5,\!6$
$7,\!3$	1	1,46	1315 ± 80	$_{6,0}$
	2	2,9	1319 ± 76	5,7
	3	4,56	1260 ± 71	$5,\!6$
7,5	1	1,49	1319 ± 80	6,0
	2	3,01	1306 ± 75	5,7
	3	4,65	1269 ± 71	$5,\!6$
7,7	1	1,53	1319 ± 80	6,0
	3	4,29	1413 ± 79	$5,\!6$

Tabelle 1: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c_{us} an Beugungsbildern bei unterschiedlicher Frequenz $\nu_{us},$ ohne Reflektor



Abbildung 3: Schallgeschwindigkeit in Abhängikeit von der Frequenz



Abbildung 4: Abstände der Maxima 1. Ordnung vom Mittelpunkt in Abhängigkeit von der Frequenz des Ultraschalls



Abbildung 5: Abstände der Maxima 2. Ordnung vom Mittelpunkt in Abhängigkeit von der Frequenz des Ultraschalls



Abbildung 6: Abstände der Maxima 3. Ordnung vom Mittelpunkt in Abhängigkeit von der Frequenz des Ultraschalls

Ordnung	Steigung $[10^{-12} \text{m/Hz}]$	Schallgeschwindigkeit
		c [m/s]
1	$200,7 \pm 2,4$	1306 ± 49
2	405 ± 51	1294 ± 196
3	604 ± 51	1302 ± 143

Tabelle 2: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus der Steigung der Graphen in Abbildung 4, 5 und 6

Ordunung	$d_k \; [\mathrm{mm}]$	$c_{us} [\mathrm{m/s}]$	$\Delta c_{us}/c_{us}$ [%]
1	1,31	1314 ± 81	6,1
2	2,62	1317 ± 76	5,7
3	3,92	1318 ± 75	$5,\!6$
4	5,23	1318 ± 74	$5,\!6$

Tabelle 3: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c_{us} am Beugungsbild mit $\nu_{us} = 6,57$ MHz, mit Reflektor

4.2.2 mit Reflektor

Nun wird ein Reflektor auf dem Gefäß mit der Flüssigkeit angebracht. Es wird ebenso wie in 4.2.1 vorgegangen. Allerdings haben wir hierbei nur bei einer Frequenz ($\nu_{us} = 6,54$ MHz) gemessen.

Die Ergebnisse dieser Messung sind in Tabelle 3 dargestellt.

4.3 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus dem Wellengitterbild

Für diese Messung muss ebenfalls der Reflektor verwendet werden, um ein stehendes Ultraschallfeld zu erzeugen. Die Linse O_2 aus Abbildung 1 wird hierbei durch ein Mikroskop ersetzt. Am Okular des Mikroskops wird desweiteren der Fotoapparat angebracht. Somit kann das Phasengitter fotografiert werden (Foto siehe Abbildung 8).

Die halbe Wellenlänge (Abstand von zwei benachbarten Maxima) kann auf dem Negativ mit Hilfe des Fotometers gemessen werden.

Allerdings kenn man den Maßstab noch nicht. Hierfür wird anstelle des Wellengitterbildes noch ein bekannter Maßstab in gleicher Weise fotographiert. Das entstehende Negativ kann ebenfalls mit dem Fotometer ausgemessen werden. Ein Vergleich ist somit möglich.

Die Messung ergab, dass 24 Skalenteile des Maßstabs, welche jeweils einen Abstand von 100 μ m zueinander haben, $(25, 3 \pm 0, 2)$ mm auf dem Negativ entsprechen. Somit ergibt sich ein Umrechnungsfaktor $u = (94, 86 \pm 0, 75) \cdot 10^{-3}$. Das Vermessen des Wellengitterbildes mit dem Fotometer ergab, dass der Abstand von 17 Maxima auf dem Negativ (19, 22 ± 0, 04) mm beträgt. Der Abstand von zwei benachbarten Maxima beträgt also $x = (1, 20 \pm 0, 01)$ mm. Aus dem Umrechnungsfaktor kann man nun den Abstand d_s zweier Maxima im Ultraschallfeld bestimmen: $d_s = (113, 8 \pm 1, 9)\mu$ m.

Mit Hilfe von Formel 15 kann nun die Schallgeschwindigkeit c_{us} ermittelt werden:

$$c_{us} = (1495 \pm 28) \,\mathrm{m/s}$$



Abbildung 7: Beugungsbild mit Reflektor (f = 6,57 MHz; Belichtungszeit 1,5 s)



Abbildung 8: Wellengitterbild (f = 6,57 MHz; Belichtungszeit 60s)



Abbildung 9: Wellenbild Kreuzgitter (f = 6.81 MHz; Belichtungszeit 15s)

	$c_{us} [\mathrm{m/s}]$
Mittelung über alle Werte bei verschiedenen Fre-	$1325,6\pm8,0$
quenzen und Beugungsordnungen, ohne Reflektor	
Mittelung über alle Werte bei verschiedenen Beu-	$1316,8\pm2,9$
gungsordnungen, mit Reflektor	
Wellenbild	1495 ± 28
Theoriewert für Wasser (20°C)	1484

Tabelle 4: Zusammenfassung der ermittelten Werte für die Schallgeschwindigkeit c_{us}

4.4 Fotografieren eines Kreuzgitters

Der Reflektor wird nun durch einen um 45° geneigten Reflektor ausgetauscht. Som
it erzeugt man ein Kreuzgitter.

Man kann nun wie in 4.2.1 das Beugungsbild (siehe Abbildung 9) oder wie in 4.3 das Wellenbild (siehe Abbildung 10) fotografieren.

5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die verschiedenen ermittelten Werte für die Schallgeschwindigkeit in der unbekannten Flüssigkeit sind in Tabelle 4 aufgelistet. Die Messung mit Hilfe des Wellenbildes ergibt einen Wert, der dem Theoriewert der Schallgeschwindigkeit in Wasser sehr nah ist. Der Theoriewert liegt auch innerhalb des Fehlerintervalls des ermittelten Wertes. Auch nach Aussehen und Geruch der Flüssigkeit zu urteilen, könnte es sich um Wasser handeln. Allerdings sind die anderen errechneten Werte für c_{us} allesamt niedriger. Das könnte allerdings an einem fehlerhaften Wert für die Brennweite f_2 liegen, da dieser, bis auf die Rechnung mit dem Wellenbild, in die Formel zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c_{us} eingeht. Bei einem größeren Wert



Abbildung 10: Beugungsbild Kreuzgitter (f = 6,81 MHz; Belichtungszeit 4s)

für die Brennweite f_2 , wäre auch der Wert für c_{us} größer. Bei einer Brennweite von $f_2 \approx 54$ cm, würden bei den Messungen mit dem Beugungsbild Werte für c_{us} herauskommen, die in ungefähr dem Theoriewert für Wasser entsprechen.

Literatur

[1] Praktikumsanleitung

A Messprotokoll