Canonical Formulation of Spin in General Relativity

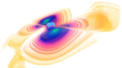
„Kanonische Formulierung des Eigendrehimpulses in der Allgemeinen Relativitätstheorie“

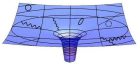
Jan Steinhoff

seit 1558

Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Disputation, 9. November 2010, Jena

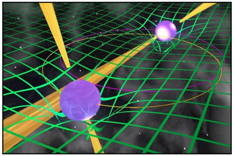




DFG : SFB/TR7 „Gravitationswellenastronomie“ und GRK 1523

- Gravitationswellen sind winzige Deformationen der Raumzeit. (relative Längenänderung $< 10^{-21}$)
- Diverse Experimente zum Nachweis laufen …
- Indirekter Nachweis mittels Radioastronomie
  $\hookrightarrow$ Nobelpreis 1993 an Hulse und Taylor
- Mögliche Quellen sind extraterrestrisch:
  - Gravitationskollaps
  - Binäre Schwarze Löcher und Neutronensterne
  - …


www.geo600.org


www.mpifr-bonn.mpg.de

Was hat diese Dissertation mit Gravitationswellen zu tun?

Der erarbeitete kanonische Formalismus wurde auf eine näherungsweise Bestimmung der Bewegung kompakter rotierender Objekte (Schwarze Löcher, Neutronensterne) in der allgemeinen Relativitätstheorie angewendet.

Gravitationswellenastronomie

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil I

- Gr
  de
- Di
- Inc
  $\hookrightarrow$
- Mö

www.geo600.org

.de

Was ha

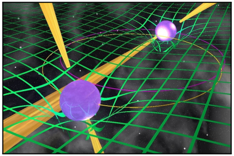
Der era … se Be-
stimmu … öcher,
Neutro

Gravitationswellenastronomie

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil I

- Gravitationswellen sind winzige Deformationen der Raumzeit. (relative Längenänderung $< 10^{-21}$)
- Diverse Experimente zum Nachweis laufen ...
- Indirekter Nachweis mittels Radioastronomie
  $\hookrightarrow$ Nobelpreis 1993 an Hulse und Taylor
- Mögliche Quellen sind extraterrestrisch:
  - Gravitationskollaps
  - Binäre Schwarze Löcher und Neutronensterne
  - ...

www.geo600.org

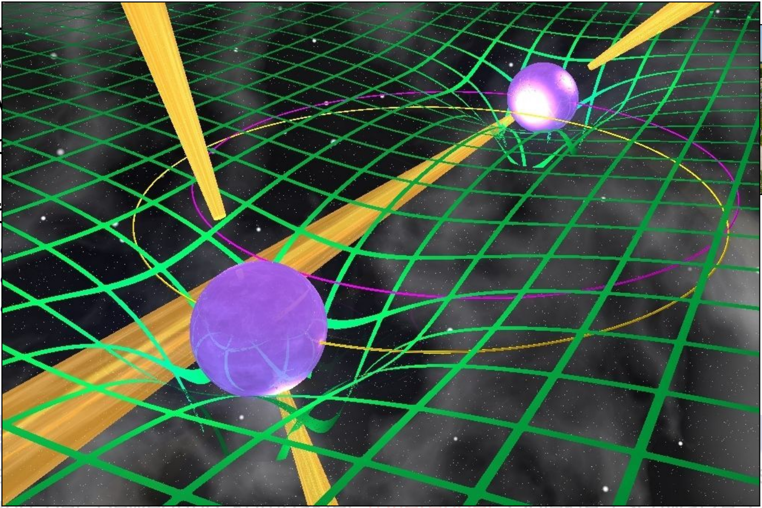


www.mpifr-bonn.mpg.de

Was hat diese Dissertation mit Gravitationswellen zu tun?

Der erarbeitete kanonische Formalismus wurde auf eine näherungsweise Bestimmung der Bewegung kompakter rotierender Objekte (Schwarze Löcher, Neutronensterne) in der allgemeinen Relativitätstheorie angewendet.

- Gr
  de
- Di
- Inc
  ↪
- Mö



www.mpifr-bonn.mpg.de

Was ha

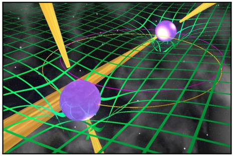
Der era … se Bestimmung der Bewegung kompakter rotierender Objekte (Schwarze Löcher, Neutronensterne) in der allgemeinen Relativitätstheorie angewendet.

Gravitationswellenastronomie

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil I

- Gravitationswellen sind winzige Deformationen der Raumzeit. (relative Längenänderung $< 10^{-21}$)
- Diverse Experimente zum Nachweis laufen ...
- Indirekter Nachweis mittels Radioastronomie $\hookrightarrow$ Nobelpreis 1993 an Hulse und Taylor
- Mögliche Quellen sind extraterrestrisch:
  - Gravitationskollaps
  - Binäre Schwarze Löcher und Neutronensterne
  - ...


www.geo600.org


www.mpifr-bonn.mpg.de

Was hat diese Dissertation mit Gravitationswellen zu tun?

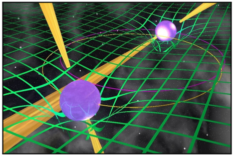
Der erarbeitete kanonische Formalismus wurde auf eine näherungsweise Bestimmung der Bewegung kompakter rotierender Objekte (Schwarze Löcher, Neutronensterne) in der allgemeinen Relativitätstheorie angewendet.

Gravitationswellenastronomie

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil I

- Gravitationswellen sind winzige Deformationen der Raumzeit. (relative Längenänderung $< 10^{-21}$)
- Diverse Experimente zum Nachweis laufen ...
- Indirekter Nachweis mittels Radioastronomie
  $\hookrightarrow$ Nobelpreis 1993 an Hulse und Taylor
- Mögliche Quellen sind extraterrestrisch:
  - Gravitationskollaps
  - Binäre Schwarze Löcher und Neutronensterne
  - ...

www.geo600.org



www.mpifr-bonn.mpg.de

Was hat diese Dissertation mit Gravitationswellen zu tun?

Der erarbeitete kanonische Formalismus wurde auf eine näherungsweise Bestimmung der Bewegung kompakter rotierender Objekte (Schwarze Löcher, Neutronensterne) in der allgemeinen Relativitätstheorie angewendet.

ADM Formalismus und PN Näherung

ADM steht für Arnowitt, Deser, Misner; PN steht für post-Newton

- $H^{\mathrm{ADM}} \mathrel{\hat{=}}$ ADM Energie ausgedrückt durch kanonische Variablen nach lösen der Constraints in der ADMTT-Eichung.
- Kanonische Materievariablen fließen über die Quellterme der Constraints ein, z.B. für eine Punktmasse:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{matter}} = \sqrt{m^2 + \gamma^{ij} p_i p_j}\,\delta\,, \quad \mathcal{H}_i^{\mathrm{matter}} = p_i \delta\,, \quad \delta \equiv \delta(x^i - z^i)$$

- Diese Quellterme folgen aus dem Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu}$.
- H^{ADM} kann nicht explizit angegeben werden.
- Näherung möglich, z.B. post-Newtonsch:

$$H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{ADM}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\underbrace{\mathcal{H}_{(4)}^{\mathrm{matter}}}_{\text{kinetische Energiedichte}} - \frac{1}{8} \underbrace{\phi_{(2)}}_{\text{Newtonsches Potential}} \underbrace{\mathcal{H}_{(2)}^{\mathrm{matter}}}_{\text{Massendichte}} \right]$$

$$H_{\mathrm{1PN}}^{\mathrm{ADM}} = \text{Integrale über } \delta \qquad \Rightarrow \text{„relativ einfach“}$$

ADM Formalismus und PN Näherung

ADM steht für Arnowitt, Deser, Misner; PN steht für post-Newton

- $H^{\text{ADM}} \mathrel{\hat{=}}$ ADM Energie ausgedrückt durch kanonische Variablen nach lösen der Constraints in der ADMTT-Eichung.
- Kanonische Materievariablen fließen über die Quellterme der Constraints ein, z.B. für eine Punktmasse:

$$\mathcal{H}^{\text{matter}} = \sqrt{m^2 + \gamma^{ij} p_i p_j}\, \delta \,, \quad \mathcal{H}_i^{\text{matter}} = p_i \delta \,, \quad \delta \equiv \delta(x^i - z^i)$$

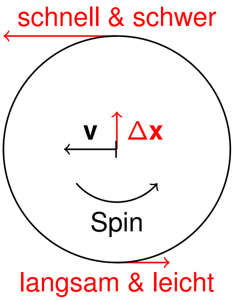
- Diese Quellterme folgen aus dem Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu}$.
- H^{ADM} kann nicht explizit angegeben werden.
- Näherung möglich, z.B. post-Newtonsch:

$$H_{\text{N}}^{\text{ADM}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\underbrace{\mathcal{H}_{(4)}^{\text{matter}}}_{\text{kinetische Energiedichte}} - \frac{1}{8} \underbrace{\phi_{(2)}}_{\text{Newtonsches Potential}} \underbrace{\mathcal{H}_{(2)}^{\text{matter}}}_{\text{Massendichte}} \right]$$

$$H_{\text{1PN}}^{\text{ADM}} = \text{Integrale über } \delta \qquad \Rightarrow \text{„relativ einfach“}$$

Spin in der speziellen Relativitätstheorie

- Komponenten des 4-Spin $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$:
  - 3-Spin $S^{ij} = \epsilon^{ijk} S_k$
  - Massendipol S^{i0}
- Schwerpunkt ist relativ.
- Benötigen Spin-Nebenbedingung (SNB):
  - Møller SNB: $\tilde{S}^{\mu 0} = 0$
  - Kovariante SNB: $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$
  - Newton-Wigner (kanonische) SNB: $m\hat{S}^{\mu 0} + \hat{S}^{\mu\nu} p_\nu = 0$



Kanonische Struktur

In kovarianter SNB, Schwerpunkt **z**:

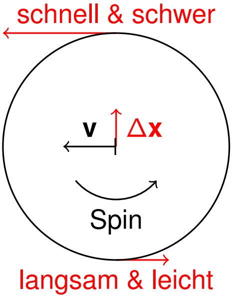
$$\{z^i, z^j\} = \frac{S^{ij}}{m^2} - \frac{p^i S^{0j} - p^j S^{0i}}{m^2 p^0}, \quad \ldots$$

In Newton-Wigner SNB:

$$\{\hat{z}^i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

Spin in der speziellen Relativitätstheorie

- Komponenten des 4-Spin $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$:
  - 3-Spin $S^{ij} = \epsilon^{ijk} S_k$
  - Massendipol S^{i0}
- Schwerpunkt ist relativ.
- Benötigen Spin-Nebenbedingung (SNB):
  - Møller SNB: $\tilde{S}^{\mu 0} = 0$
  - Kovariante SNB: $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$
  - Newton-Wigner (kanonische) SNB: $m\hat{S}^{\mu 0} + \hat{S}^{\mu\nu} p_\nu = 0$



Kanonische Struktur

In kovarianter SNB, Schwerpunkt **z**:

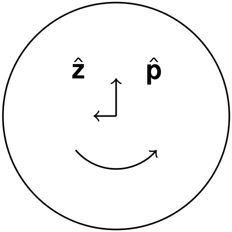
$$\{z^i, z^j\} = \frac{S^{ij}}{m^2} - \frac{p^i S^{0j} - p^j S^{0i}}{m^2 p^0}\,, \quad \ldots$$

In Newton-Wigner SNB:

$$\{\hat{z}^i, p_j\} = \delta_{ij}\,, \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

Spin in der speziellen Relativitätstheorie

- Komponenten des 4-Spin $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$:
  - 3-Spin $S^{ij} = \epsilon^{ijk} S_k$
  - Massendipol S^{i0}
- Schwerpunkt ist relativ.
- Benötigen Spin-Nebenbedingung (SNB):
  - Møller SNB: $\tilde{S}^{\mu 0} = 0$
  - Kovariante SNB: $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$
  - Newton-Wigner (kanonische) SNB: $m\hat{S}^{\mu 0} + \hat{S}^{\mu\nu} p_\nu = 0$



Kanonische Struktur

In kovarianter SNB, Schwerpunkt **z**:

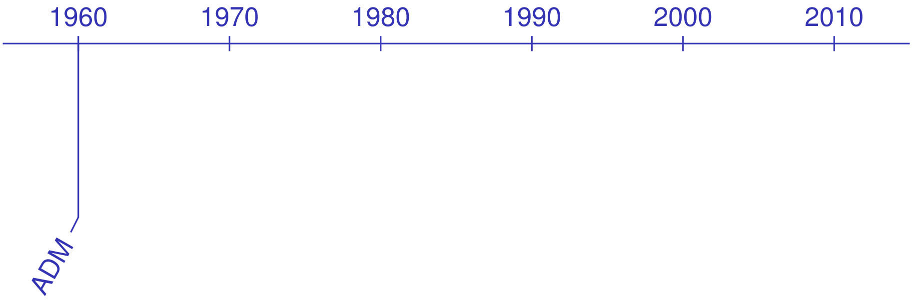
$$\{z^i, z^j\} = \frac{S^{ij}}{m^2} - \frac{p^i S^{0j} - p^j S^{0i}}{m^2 p^0}\,, \quad \ldots$$

In Newton-Wigner SNB:

$$\{\hat{z}^i, p_j\} = \delta_{ij}\,, \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

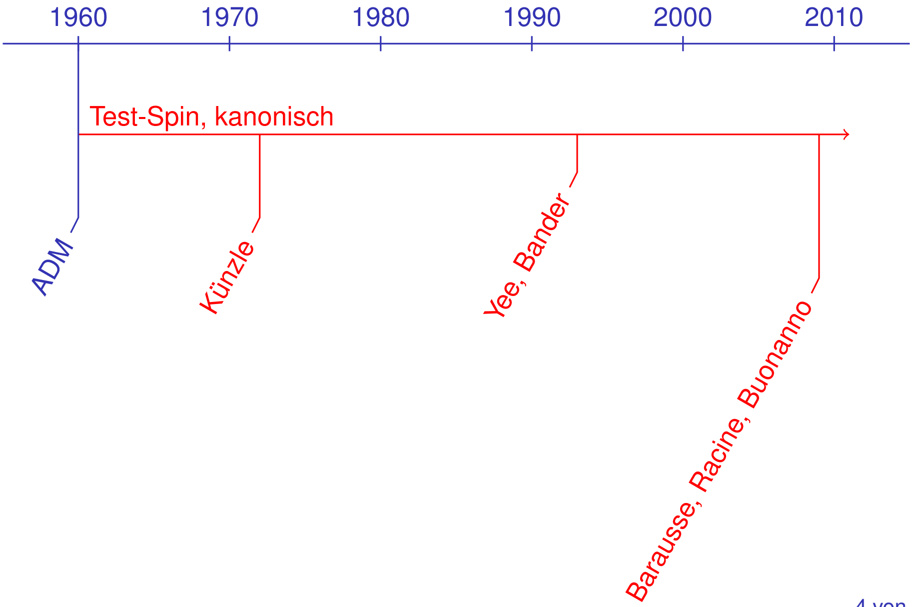
Wissensstand bis heute

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil II



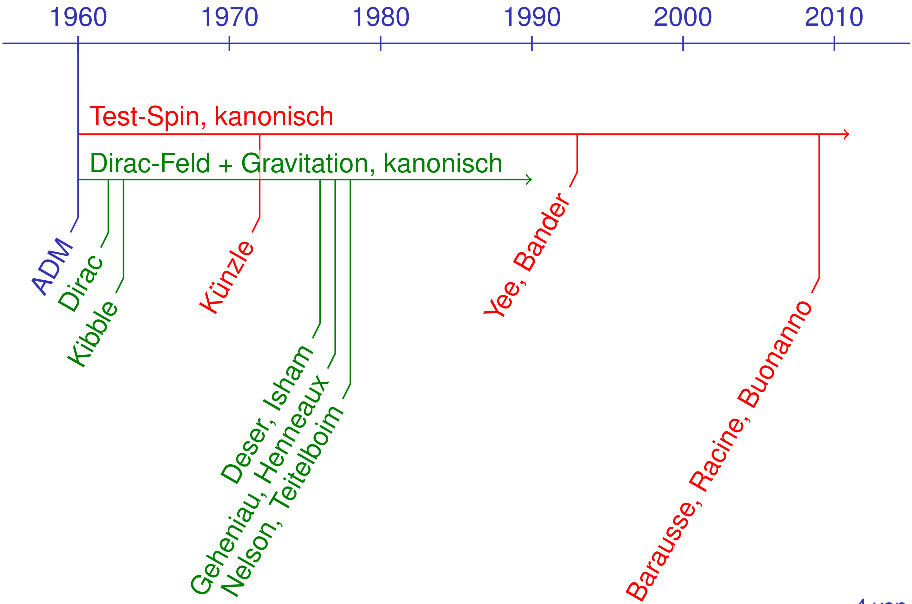
Wissensstand bis heute

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil II



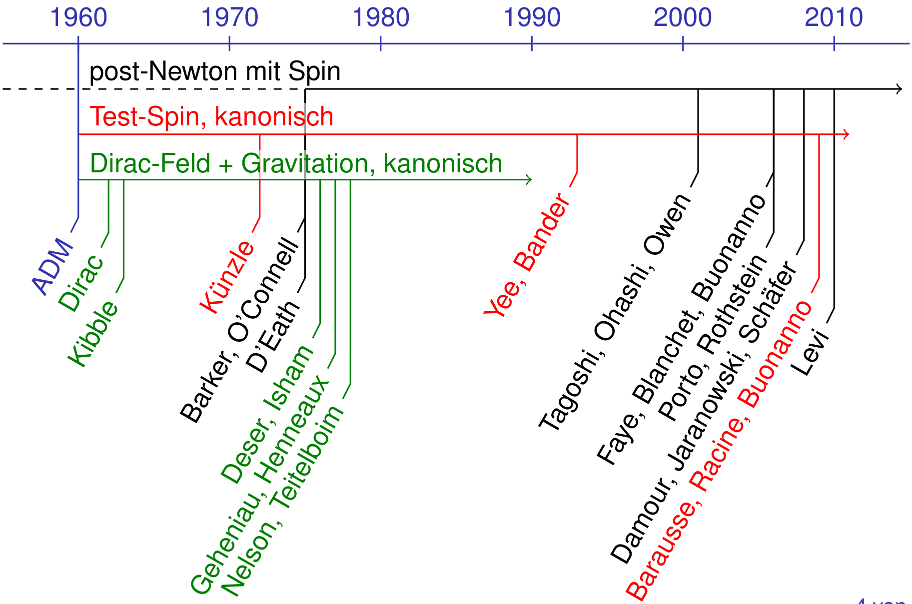
Wissensstand bis heute

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil II



Wissensstand bis heute

Einordnung in das wissenschaftliche Umfeld, Teil II



Winkelgeschwindigkeit und Spin

in Newtonscher Mechanik und spezieller Relativitätstheorie (SRT)

	Newton	SRT
Körperfeste Basis	$x^{[i]} = \Lambda_{[i]j} x^j$	
Rotationsfreiheitsgrade	$\Lambda_{[k]i}\Lambda_{[k]j} = \delta_{ij}$	$\eta^{AB}\Lambda_{A\mu}\Lambda_{B\nu} = \eta_{\mu\nu}$
$\hookrightarrow$ Nebenbedingung		$\Lambda^{[i]\mu} p_\mu = 0$
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega^{ij} = \Lambda_{[k]i} \frac{\mathrm{d}\Lambda_{[k]j}}{\mathrm{d}t}$	$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A{}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\Lambda^{A\nu}}{\mathrm{d}\tau}$
Spin (L: Lagrangefkt.)	$S_{ij} = 2\frac{\partial L}{\partial \Omega^{ij}}$	$S_{\mu\nu} = 2\frac{\partial L}{\partial \Omega^{\mu\nu}}$
$\hookrightarrow$ Nebenbedingung		$S_{\mu\nu} p^\nu = 0$

Anmerkung:

- Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist $\Omega^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega^{jk}$. Analog für den Spin.

Winkelgeschwindigkeit und Spin

in Newtonscher Mechanik und spezieller Relativitätstheorie (SRT)

	Newton	SRT
Körperfeste Basis	$x^{[i]} = \Lambda_{[i]j} x^j$	
Rotationsfreiheitsgrade	$\Lambda_{[k]i}\Lambda_{[k]j} = \delta_{ij}$	$\eta^{AB}\Lambda_{A\mu}\Lambda_{B\nu} = \eta_{\mu\nu}$
$\hookrightarrow$ Nebenbedingung		$\Lambda^{[i]\mu} p_\mu = 0$
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega^{ij} = \Lambda_{[k]i} \frac{\mathrm{d}\Lambda_{[k]j}}{\mathrm{d}t}$	$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A{}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\Lambda^{A\nu}}{\mathrm{d}\tau}$
Spin (L: Lagrangefkt.)	$S_{ij} = 2\frac{\partial L}{\partial \Omega^{ij}}$	$S_{\mu\nu} = 2\frac{\partial L}{\partial \Omega^{\mu\nu}}$
$\hookrightarrow$ Nebenbedingung		$S_{\mu\nu} p^\nu = 0$

Anmerkung:

- Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist $\Omega^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega^{jk}$. Analog für den Spin.

Wirkungszugang mit minimaler Kopplung

- Vierbein $e_{a\mu}$ wird als Gravitationsfeld verwendet:

$$\Lambda_{A\mu}\Lambda^{A}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \Lambda_{Aa}\Lambda^{A}{}_{b} = \eta_{ab}$$

- Minimale Kopplung:

$$e^{a}{}_{\mu}e^{b}{}_{\nu}\Omega^{\mu\nu} = \Omega^{ab} = \Lambda_{A}{}^{a}\frac{D\Lambda^{Ab}}{d\tau} = \Lambda_{A}{}^{a}\left[\frac{d\Lambda^{Ab}}{d\tau} - \Lambda^{A}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{cb}u^{\mu}\right]$$

- Nebenbedingungen:

$$S_{\mu\nu}p^{\nu} = 0\,, \quad \Lambda^{[i]a}e_{a\nu}p^{\nu} = 0\,, \quad p_{\mu}p^{\mu} + m^{2} = 0$$

- Löse Nebenbedingungen und Constraints, fordere Eichbedingungen.
- Bringe Lagrangefunktion durch Variablentransformation auf die Form

$$L = p_i\dot{q}^i - H$$

Wirkungszugang mit minimaler Kopplung

- Vierbein $e_{a\mu}$ wird als Gravitationsfeld verwendet:

$$\Lambda_{A\mu}\Lambda^{A}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \quad \to \quad \Lambda_{Aa}\Lambda^{A}{}_{b} = \eta_{ab}$$

- Minimale Kopplung:

$$e^{a}{}_{\mu}e^{b}{}_{\nu}\Omega^{\mu\nu} = \Omega^{ab} = \Lambda_{A}{}^{a}\frac{D\Lambda^{Ab}}{d\tau} = \Lambda_{A}{}^{a}\left[\frac{d\Lambda^{Ab}}{d\tau} - \Lambda^{A}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{cb}u^{\mu}\right]$$

- Nebenbedingungen:

$$S_{\mu\nu}p^{\nu} = 0\,, \quad \Lambda^{[i]a}e_{a\nu}p^{\nu} = 0\,, \quad p_{\mu}p^{\mu} + m^2 = 0$$

- Löse Nebenbedingungen und Constraints, fordere Eichbedingungen.
- Bringe Lagrangefunktion durch Variablentransformation auf die Form

$$L = p_i\dot{q}^i - H$$

Wirkungszugang mit minimaler Kopplung

- Vierbein $e_{a\mu}$ wird als Gravitationsfeld verwendet:

$$\Lambda_{A\mu}\Lambda^{A}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \Lambda_{Aa}\Lambda^{A}{}_{b} = \eta_{ab}$$

- Minimale Kopplung:

$$e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} \Omega^{\mu\nu} = \Omega^{ab} = \Lambda_{A}{}^{a} \frac{D\Lambda^{Ab}}{d\tau} = \Lambda_{A}{}^{a} \left[\frac{d\Lambda^{Ab}}{d\tau} - \Lambda^{A}{}_{c} \omega_{\mu}{}^{cb} u^{\mu} \right]$$

- Nebenbedingungen:

$$S_{\mu\nu} p^{\nu} = 0\,, \quad \Lambda^{[i]a} e_{a\nu} p^{\nu} = 0\,, \quad p_{\mu} p^{\mu} + m^2 = 0$$

- Löse Nebenbedingungen und Constraints, fordere Eichbedingungen.
- Bringe Lagrangefunktion durch Variablentransformation auf die Form

$$L = \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}^3 x \, \hat{\pi}^{ij\mathrm{TT}} \hat{h}^{\mathrm{TT}}_{ij,0} + \hat{p}_i \dot{\hat{z}}^i + \frac{1}{2} \hat{S}_{(i)(j)} \hat{\Omega}^{(i)(j)} - H^{\mathrm{ADM}}$$

Wirkungszugang mit minimaler Kopplung

- Vierbein e

- Minimale K

$e^a{}_\mu$

- Nebenbed

- Löse Nebe
- Bringe Lag

Kanonische Struktur

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H^{\mathrm{ADM}}\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\{\hat{z}^i, \hat{p}_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{\Lambda}^{[i](j)}, \hat{S}_{(k)(l)}\} = \hat{\Lambda}^{[i](k)}\delta_{lj} - \hat{\Lambda}^{[i](l)}\delta_{kj}$$

$$\{\hat{S}_{(i)(j)}, \hat{S}_{(k)(l)}\} = \delta_{ik}\hat{S}_{(j)(l)} - \delta_{jk}\hat{S}_{(i)(l)} - \delta_{il}\hat{S}_{(j)(k)} + \delta_{jl}\hat{S}_{(i)(k)}$$

$$\{\hat{h}^{\mathrm{TT}}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{kl\mathrm{TT}}(\mathbf{x}')\} = 16\pi\delta^{\mathrm{TT}kl}_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\delta^{\mathrm{TT}ij}_{kl} \equiv \text{TT-Projektor}$$

$$L = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^3x\, \hat{\pi}^{ij\mathrm{TT}}\hat{h}^{\mathrm{TT}}_{ij,0} + \hat{p}_i\dot{\hat{z}}^i + \frac{1}{2}\hat{S}_{(i)(j)}\hat{\Omega}^{(i)(j)} - H^{\mathrm{ADM}}$$

Transformation auf kanonische Variablen

gültig linear im Spin

- Eichungen (vgl. Kibble 1963): $e_{(0)\mu} = n_\mu, \quad (e_{(i)j}) = \sqrt{(\gamma_{ij})}, \quad \tau = t$
- Materievariablen: passen zur SNB $\hat{S}^{\mu\nu}(p_\nu + mn_\nu) = 0$

$$z^i = \hat{z}^i - \frac{nS^i}{m - np}\,, \quad np = -\sqrt{m^2 + \gamma^{ij} p_i p_j}$$

$$S_{ij} = \hat{S}_{ij} - \frac{p_i nS_j}{m - np} + \frac{p_j nS_i}{m - np}\,, \quad nS_i = -\frac{p_k \gamma^{kj} \hat{S}_{ji}}{m}$$

$$\Lambda^{[i](j)} = \hat{\Lambda}^{[i](k)} \left(\delta_{kj} + \frac{p_{(k)} p_{(j)}}{m(m - np)} \right)\,, \quad \gamma_{ik}\gamma_{jl} A^{kl} = \frac{1}{2}\hat{S}_{ij} + \frac{m p_{(i} nS_{j)}}{np(m - np)}$$

$$p_i = \hat{p}_i - K_{ij} nS^j - A^{kl} e_{(j)k} e^{(j)}{}_{l,i} + \left(\frac{1}{2} S_{kj} + \frac{p_{(k} nS_{j)}}{np} \right) \Gamma^{kj}{}_i$$

- Feldvariablen:

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = \hat{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}$$

$$\pi^{ij\mathrm{TT}} = \hat{\pi}^{ij\mathrm{TT}} - \delta_{kl}^{\mathrm{TT}ij} (8\pi A^{(kl)} \delta + 16\pi B_{mn}^{kl} A^{[mn]} \delta)$$

$$2B_{mn}^{kl} \equiv e^{(i)}{}_m \frac{\partial e_{(i)n}}{\partial \gamma_{kl}} - e^{(i)}{}_n \frac{\partial e_{(i)m}}{\partial \gamma_{kl}}\,, \quad \delta_{kl}^{\mathrm{TT}ij} \equiv \text{TT-Projektor}$$

Konstruktion Ordnung für Ordnung

- $H^{\text{ADM}} \widehat{=}$ ADM Energie ausgedrückt durch kanonische Variablen.
- Man muss „nur“ die Transformation auf kanonische Variablen finden.
  $\hookrightarrow$ Transformation aus Konsistenzbedingungen

- Der kanonische Spin hat konstante Länge:

$$\hat{S}_{(i)(j)}\hat{S}_{(i)(j)} = 2\hat{S}_{(i)}\hat{S}_{(i)} = \text{const} = S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$$

- Gesamtimpuls P_i und Gesamtdrehimpuls J_{ij} lauten (ohne $\pi^{ij\text{TT}}$-Trafo):

$$P_i = \hat{p}_i + P_i^{\text{field}}\,, \qquad J_{ij} = \hat{z}^i\hat{p}_j - \hat{z}^j\hat{p}_i + \hat{S}_{(i)(j)} + J_{ij}^{\text{field}}$$

$$P_i = \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}_i^{\text{matter}} + P_i^{\text{field}}\,, \quad J_{ij} = \int d^3\mathbf{x}\left(x^i\mathcal{H}_j^{\text{matter}} - x^j\mathcal{H}_i^{\text{matter}}\right) + J_{ij}^{\text{field}}$$

- Impulsdichte $\mathcal{H}_i^{\text{matter}}$ folgt aus $\mathcal{H}_i^{\text{matter}} = \sqrt{-g}\,T^0{}_i$ und

$$\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}\tau\left[u^{(\mu}p^{\nu)}\delta_{(4)} - \left(S^{\alpha(\mu}u^{\nu)}\delta_{(4)}\right)_{||\alpha}\right]$$

$\delta_{(4)} \equiv \delta(x - z(\tau))$ [W. M. Tulczyjew (1959)]

Konstruktion Ordnung für Ordnung

- $H^{\mathrm{ADM}} \triangleq$ ADM Energie ausgedrückt durch kanonische Variablen.
- Man muss „nur“ die Transformation auf kanonische Variablen finden.
  $\hookrightarrow$ Transformation aus Konsistenzbedingungen

- Der kanonische Spin hat konstante Länge:

$$\hat{S}_{(i)(j)} \hat{S}_{(i)(j)} = 2 \hat{S}_{(i)} \hat{S}_{(i)} = \text{const} = S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$$

- Gesamtimpuls P_i und Gesamtdrehimpuls J_{ij} lauten (ohne $\pi^{ij\mathrm{TT}}$-Trafo):

$$P_i = \hat{p}_i + P_i^{\text{field}}\,, \qquad J_{ij} = \hat{z}^i \hat{p}_j - \hat{z}^j \hat{p}_i + \hat{S}_{(i)(j)} + J_{ij}^{\text{field}}$$

$$P_i = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{H}_i^{\text{matter}} + P_i^{\text{field}}\,, \quad J_{ij} = \int d^3\mathbf{x} \left(x^i \mathcal{H}_j^{\text{matter}} - x^j \mathcal{H}_i^{\text{matter}} \right) + J_{ij}^{\text{field}}$$

- Impulsdichte $\mathcal{H}_i^{\text{matter}}$ folgt aus $\mathcal{H}_i^{\text{matter}} = \sqrt{-g}\, T^0{}_i$ und

$$\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}\tau \left[u^{(\mu} p^{\nu)} \delta_{(4)} - \left(S^{\alpha(\mu} u^{\nu)} \delta_{(4)} \right)_{||\alpha} \right]$$

$\delta_{(4)} \equiv \delta(x - z(\tau))$ [W. M. Tulczyjew (1959)]

Konstruktion Ordnung für Ordnung

- $H^{\mathrm{ADM}} \mathrel{\hat{=}}$ ADM Energie ausgedrückt durch kanonische Variablen.
- Man muss „nur“ die Transformation auf kanonische Variablen finden.
  $\hookrightarrow$ Transformation aus Konsistenzbedingungen

- Der kanonische Spin hat konstante Länge:

$$\hat{S}_{(i)(j)}\hat{S}_{(i)(j)} = 2\hat{S}_{(i)}\hat{S}_{(i)} = \text{const} = S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$$

- Gesamtimpuls P_i und Gesamtdrehimpuls J_{ij} führen auf (ohne $\pi^{ij\mathrm{TT}}$-Trafo):

$$\hat{p}_i = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{H}_i^{\text{matter}}$$

$$\hat{z}^i\hat{p}_j - \hat{z}^j\hat{p}_i + \hat{S}_{(i)(j)} = \int d^3\mathbf{x} \left(x^i \mathcal{H}_j^{\text{matter}} - x^j \mathcal{H}_i^{\text{matter}} \right)$$

- Impulsdichte $\mathcal{H}_i^{\text{matter}}$ folgt aus $\mathcal{H}_i^{\text{matter}} = \sqrt{-g}\,T^0{}_i$ und

$$\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}\tau \left[u^{(\mu}p^{\nu)}\delta_{(4)} - \left(S^{\alpha(\mu}u^{\nu)}\delta_{(4)} \right)_{||\alpha} \right]$$

$\delta_{(4)} \equiv \delta(x - z(\tau))$ [W. M. Tulczyjew (1959)]

Konstruktion Ordnung für Ordnung

- $H^{\text{ADM}} \triangleq$ ADM Energie ausgedrückt durch kanonische Variablen.
- Man muss „nur“ die Transformation auf kanonische Variablen finden.
  $\hookrightarrow$ Transformation aus Konsistenzbedingungen

- Der kanonische Spin hat konstante Länge:

$$\hat{S}_{(i)(j)}\hat{S}_{(i)(j)} = 2\hat{S}_{(i)}\hat{S}_{(i)} = \text{const} = S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$$

- Gesamtimpuls P_i und Gesamtdrehimpuls J_{ij} führen auf (ohne $\pi^{ij\text{TT}}$-Trafo):

$$\hat{p}_i = \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}_i^{\text{matter}}$$

$$\hat{z}^i\hat{p}_j - \hat{z}^j\hat{p}_i + \hat{S}_{(i)(j)} = \int d^3\mathbf{x}\left(x^i\mathcal{H}_j^{\text{matter}} - x^j\mathcal{H}_i^{\text{matter}}\right)$$

- Impulsdichte $\mathcal{H}_i^{\text{matter}}$ folgt aus $\mathcal{H}_i^{\text{matter}} = \sqrt{-g}\,T^0{}_i$ und

$$\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}\tau\left[u^{(\mu}p^{\nu)}\delta_{(4)} - \left(S^{\alpha(\mu}u^{\nu)}\delta_{(4)}\right)_{||\alpha}\right]$$

$\delta_{(4)} \equiv \delta(x - z(\tau))$ [W. M. Tulczyjew (1959)]

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\rightarrow$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \qquad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p}S_{\mu\rho}S_{\nu}{}^{\rho} - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $$J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$$	Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $$\mathcal{H}^{\text{matter}}_{S^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$$
Nebenbedingungen müssen erhalten bleiben.	Konsistenzbedingungen für höhere Ordnung unklar.
Bestimmung der Variablentransformation schwierig.	Bestimmung der Variablentransformation sehr schwierig.
$K_{ij,0}$-Terme sind problematisch.	Führende Ordnung einfach.

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\rightarrow$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \qquad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p} S_{\mu\rho}S_{\nu}{}^{\rho} - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\dfrac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$	Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $\mathcal{H}^{\text{matter}}_{S^2} = \dfrac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$
Nebenbedingungen müssen erhalten bleiben.	Konsistenzbedingungen für höhere Ordnung unklar.
Bestimmung der Variablentransformation schwierig.	Bestimmung der Variablentransformation sehr schwierig.
$K_{ij,0}$-Terme sind problematisch.	Führende Ordnung einfach.

- Quadratische Ordnung im Spin $\rightarrow$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}, \quad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p} S_{\mu\rho} S_{\nu}{}^{\rho} - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung

- Nach Bailey, Israel (1975) gilt:

$$J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$$

- Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{H}^{\text{matter}}_{S^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$$

- Nebenbedi…
erhalten bl…
- Bestimmur…
transforma…
- $K_{ij,0}$-Terme

L_{S^2} äquivalent zu Porto, Rothstein (2008)

$$L_{S^2} = \underbrace{-\frac{1}{2m} R_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\rho\mu} S^{\alpha\beta} \frac{u^\nu u_\rho}{\sqrt{-u_\sigma u^\sigma}}}_{\text{erhält Nebenbedingungen}} \underbrace{-\frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\nu} Q^{\alpha\beta} \frac{u^\mu u^\nu}{\sqrt{-u_\sigma u^\sigma}}}_{\text{Quadrupoldeformation}}$$

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\rightarrow$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \qquad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p}S_{\mu\rho}S_\nu{}^\rho - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
• Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$	• Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $\mathcal{H}^{\text{matter}}_{S^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$
• Nebenbedingungen müssen erhalten bleiben.	• Konsistenzbedingungen für höhere Ordnung unklar.
• Bestimmung der Variablentransformation schwierig.	• Bestimmung der Variablentransformation sehr schwierig.
• $K_{ij,0}$-Terme sind problematisch.	• Führende Ordnung einfach.

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\rightarrow$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \quad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p}S_{\mu\rho}S_{\nu}{}^{\rho} - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
• Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $$J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$$	• Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $$\mathcal{H}^{\text{matter}}_{S^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$$
• Nebenbedingungen müssen erhalten bleiben.	• Konsistenzbedingungen für höhere Ordnung unklar.
• Bestimmung der Variablen-transformation schwierig.	• Bestimmung der Variablen-transformation sehr schwierig.
• $K_{ij,0}$-Terme sind problematisch.	• Führende Ordnung einfach.

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\to$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \qquad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p} S_{\mu\rho} S_\nu{}^\rho - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
• Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6 \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$	• Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $\mathcal{H}^{\text{matter}}_{S^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$

Steinhoff, Puetzfeld (2010)

$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = \int d\tau \left[u^{(\mu}p^{\nu)}\delta_{(4)} + \frac{1}{3} R_{\alpha\beta\rho}{}^{(\mu}J^{\nu)\rho\beta\alpha}\delta_{(4)} + \left(u^{(\mu}S^{\nu)\alpha}\delta_{(4)}\right)_{||\alpha} - \frac{2}{3}\left(J^{\mu\alpha\beta\nu}\delta_{(4)}\right)_{||(\alpha\beta)} \right]$$

• $K_{ij,0}$-Terme sind problematisch.	• Führende Ordnung einfach.

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\to$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \quad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p}S_{\mu\rho}S_{\nu}{}^{\rho} - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
• Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $$J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\frac{\partial L}{\partial \mathrm{R}_{\mu\nu\alpha\beta}}$$	• Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $$\mathcal{H}^{\text{matter}}_{\mathrm{S}^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$$
• Nebenbedingungen müssen erhalten bleiben.	• Konsistenzbedingungen für höhere Ordnung unklar.
• Bestimmung der Variablentransformation schwierig.	• Bestimmung der Variablentransformation sehr schwierig.
• $K_{ij,0}$-Terme sind problematisch.	• Führende Ordnung einfach.

Höhere Ordnungen im Spin

am Beispiel der Quadrupoldeformation auf quadratischer Ordnung im Spin

- Quadratische Ordnung im Spin $\rightarrow$ Quadrupoldeformation.
- Ansatz für Dixons Quadrupol:

$$J^{\nu\rho\beta\alpha} = -3u^{[\nu}Q^{\rho][\beta}u^{\alpha]}\,, \qquad Q_{\mu\nu} = \frac{C_Q}{m_p}S_{\mu\rho}S_{\nu}{}^{\rho} - \text{Spur}$$

- C_Q ist objektabhängige Konstante. Für Schwarze Löcher gilt $C_Q = 1$.

Wirkungszugang	Konstruktion Ordnung für Ordnung
Nach Bailey, Israel (1975) gilt: $$J^{\mu\nu\alpha\beta} = -6\frac{\partial L}{\partial \mathrm{R}_{\mu\nu\alpha\beta}}$$	Führender Ordnung aus $T^{\mu\nu}$: $$\mathcal{H}^{\text{matter}}_{\mathrm{S}^2} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj}Q_{ij}\delta\right)_{;kl}$$

Zugang auf Next-to-Leading Order (NLO)

Hergt, Schäfer, (2008): $\hat{p}_i$-Anteil von H^{ADM} folgt aus Poincaré Algebra.

$\hookrightarrow$ Benötigen noch $\hat{p}_i = 0$ Teil von H^{ADM} bzw. von $\mathcal{H}^{\text{matter}}_{\mathrm{S}^2}$.

$\hookrightarrow$ $\hat{p}_i = 0$ Teil von $\mathcal{H}^{\text{matter}}_{\mathrm{S}^2}$ folgt aus $T^{\mu\nu}$.

NLO Spin-Bahn

Siehe auch Tagoshi, Ohashi, Owen (2001), sowie Faye, Blanchet, Buonanno (2006).
Hamiltonfunktion zuerst in Damour, Jaranowski, Schäfer (2008).

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{NLO}} = & -\frac{((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^2}\left[\frac{5m_2\hat{\mathbf{p}}_1^2}{8m_1^3} + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)}{4m_1^2} - \frac{3\hat{\mathbf{p}}_2^2}{4m_1m_2}\right.\\
&\left. + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{4m_1^2} + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})^2}{2m_1m_2}\right]\\
& + \frac{((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^2}\left[\frac{(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)}{m_1m_2} + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{m_1m_2}\right]\\
& + \frac{((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)}{\hat{r}_{12}^2}\left[\frac{2(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{m_1m_2} - \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{4m_1^2}\right]\\
& - \frac{((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^3}\left[\frac{11m_2}{2} + \frac{5m_2^2}{m_1}\right]\\
& + \frac{((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^3}\left[6m_1 + \frac{15m_2}{2}\right] + (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned}
$$

NLO Spin_1-Spin_2

Teilresultat in Porto, Rothstein (2006).

$$
\begin{aligned}
H^{\rm NLO}_{S_1S_2} = {} & \frac{1}{2m_1m_2\hat{r}_{12}^3}[\tfrac{3}{2}((\hat{\mathbf{p}}_1\times\hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})((\hat{\mathbf{p}}_2\times\hat{\mathbf{S}}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})+\tfrac{1}{2}(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2)(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)\\
& +6((\hat{\mathbf{p}}_2\times\hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})((\hat{\mathbf{p}}_1\times\hat{\mathbf{S}}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})-\tfrac{1}{2}(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_1)\\
& -15(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})+(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_1)(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)\\
& -3(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)+3(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})\\
& +3(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_1)(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})+3(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_1)(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})\\
& +3(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})-3(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2)(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})]\\
& +\frac{3}{2m_1^2\hat{r}_{12}^3}[-((\hat{\mathbf{p}}_1\times\hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})((\hat{\mathbf{p}}_1\times\hat{\mathbf{S}}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})\\
& +(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2)(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})^2-(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_1)(\hat{\mathbf{p}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})]\\
& +\frac{3}{2m_2^2\hat{r}_{12}^3}[-((\hat{\mathbf{p}}_2\times\hat{\mathbf{S}}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})((\hat{\mathbf{p}}_2\times\hat{\mathbf{S}}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})\\
& +(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2)(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})^2-(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{p}}_2)(\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})]\\
& +\frac{6(m_1+m_2)}{\hat{r}_{12}^4}[(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2)-2(\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_2\cdot\hat{\mathbf{n}}_{12})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H^{\mathrm{NLO}}_{\mathrm{S}_1^2} = \frac{m_2}{m_1^3 \hat{r}_{12}^3} \Bigg[& \left(\frac{15}{4} - \frac{9}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4} C_Q\right) \hat{\mathbf{p}}_1^2 \hat{\mathbf{S}}_1^2 \\
& + \left(-\frac{9}{8} + \frac{3}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \left(-\frac{21}{8} + \frac{9}{4} C_Q\right) \hat{\mathbf{p}}_1^2 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \\
& + \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1)^2 \Bigg] + \frac{C_Q}{m_1 m_2 \hat{r}_{12}^3} \left[\frac{9}{4} \hat{\mathbf{p}}_2^2 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 - \frac{3}{4} \hat{\mathbf{p}}_2^2 \hat{\mathbf{S}}_1^2 \right] \\
+ \frac{1}{m_1^2 \hat{r}_{12}^3} \Bigg[& \left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \\
& + \left(-3 + \frac{3}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{4} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \hat{\mathbf{S}}_1^2 \\
& + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \left(3 - \frac{21}{4} C_Q\right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2)(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \\
& - \frac{15}{4} C_Q (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1)(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \Bigg] \\
+ \frac{m_2}{\hat{r}_{12}^4} \Bigg[& \left(2 + \frac{1}{2} C_Q\right) \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \left(3 + \frac{3}{2} C_Q\right) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \Bigg] \\
+ \frac{m_2^2}{m_1 \hat{r}_{12}^4} \Bigg[& (1 + 2 C_Q) \hat{\mathbf{S}}_1^2 - (1 + 6 C_Q)(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \Bigg]
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

1. Der ADM Formalismus für rotierende Objekte ist sehr nützlich.
2. Linear im Spin wurde der ADM Formalismus über einen Wirkungszugang auf rotierende Objekte erweitert.
3. Diese Herleitung ähnelt einem Zugang von Kibble für das Dirac-Feld.
4. Alternativ gelingt eine Konstruktion des Formalismus Ordnung für Ordnung über P_i und J_{ij} (linear im Spin).
5. Beide Zugänge können im Prinzip auf höhere Ordnungen im Spin angewendet werden. Die NLO $\mathrm{S_1}^2$ Wechselwirkung wurde behandelt.
6. Neue Resultate sind $H^{\mathrm{NLO}}_{\mathrm{S_1S_2}}$ und $H^{\mathrm{NLO}}_{\mathrm{S_1^2}}$. $H^{\mathrm{NLO}}_{\mathrm{SB}}$ wurde reproduziert.

   H^{ADM} ist nun bis 3PN bekannt für Binärsysteme bis zum maximalen Spin.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

und für finanzielle Unterstützung durch die DFG
(Deutsche Forschungsgemeinschaft)